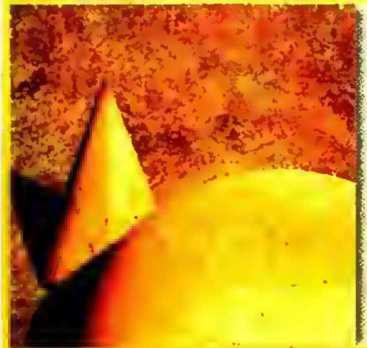
PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - TRẦN ÁNH DƯƠNG - NGUYỄN TRUNG KIÊN - TRẦN QUANG TIẾN

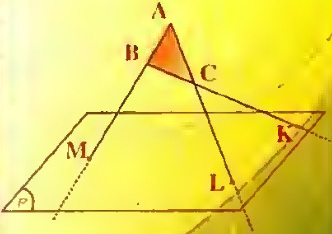
GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11

(CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN)

(Tái bản lần thứ nhất)

- **Tóm tắt lý thuyết**
- **Bài tập căn bản**
- **Câu hỏi trắc nghiệm**





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI – TRẦN ÁNH DƯƠNG – NGUYỄN TRUNG KIÊN – TRẦN QUANG TIẾN

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 11

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

(Tái bản lần thứ nhất)

- TÓM TẮT LÝ THUYẾT
- BÀI TẬP CĂN BẢN
- CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11

(Chương trình chuẩn)

Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung

Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH – THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số 1L-127 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty In Hưng Phú
Số xuất bản: 345-2009/CXB/44-54/ĐHQGHN, ngày 24/4/2009
Quyết định xuất bản số: 127 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **"Hướng dẫn giải bài tập Hình học 11"** có nội dung tương ứng với sách giáo khoa hình học 11, chương trình chuẩn được áp dụng vào năm học 2007 – 2008.

Mỗi mục (§) của quyển sách gồm bốn phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III Câu hỏi trắc nghiệm

IV. Đáp án

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong SGK, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án các câu hỏi trắc nghiệm có cơ sở ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của sách giáo khoa, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức. Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Hình học 11.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Các tác giả

CHƯƠNG I
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

I. Tóm tắt lý thuyết

1. **Định nghĩa**: Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

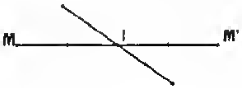
2. **Kí hiệu**: Nếu kí hiệu phép biến hình là f thì ta viết f(M) = M' hay M' = f(M). Ta gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình f. Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu H' = f(H) là tập hợp các điểm M' = f(M), với mọi điểm M thuộc (H). Khi đó ta nói f biến hình H thành hình H', hay hình H' là ảnh của hình H qua phép biến hình f. Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Trong mặt phẳng, cho điểm I cố định. Chứng minh rằng: quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M trong mặt phẳng với một điểm M' của mặt phẳng sao cho I là trung điểm của MM' là một phép biến hình.

Giải

Vì I là trung điểm MM' nên M' nằm trên đường thẳng MI và IM = IM', với mỗi điểm M thì ta tìm được duy nhất một điểm M' sao cho I là trung điểm của MM'. Vậy phép đặt tương ứng như trên là một phép biến hình.



Bài 2. Trong mặt phẳng, cho vectơ $\vec{a}$ không đổi, phép đặt tương ứng mỗi điểm nằm trong mặt phẳng với một điểm M' nằm trong mặt phẳng đó sao cho: $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ có phải là phép biến hình không? Vì sao?

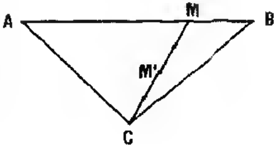
Giải

Vì $\vec{a}$ không đổi nên với mỗi điểm M ta tìm được duy nhất điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$. Vậy phép đặt tương ứng như trên là phép biến hình.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Quy tắc cho tương ứng mỗi điểm M thuộc cạnh AB với một điểm M' là trung điểm của CM có phải là phép biến hình không? Vì sao?

Giải

Với mỗi điểm M thuộc AB ta xác định được duy nhất điểm M' là trung điểm của CM; tuy nhiên theo quy tắc trên thì điểm C không được đặt tương ứng với bất kỳ điểm nào của mặt phẳng, do đó quy tắc trên không phải là một phép biến hình.



III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm của mặt phẳng với:

(A) 2 điểm thuộc mặt phẳng đó;

(B) Vô số điểm thuộc mặt phẳng đó;

(C) 1 điểm duy nhất thuộc mặt phẳng đó;

(D) 3 điểm thuộc mặt phẳng đó.

Quy tắc nào là phép biến hình?

2. Trong mặt phẳng, các quy tắc sau đây, quy tắc nào không phải là phép biến hình?

(A) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm với một điểm đối xứng với nó qua một đường thẳng;

(B) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm với một điểm đối xứng với nó qua một điểm cho trước;

(C) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' mà $\widehat{MOM'} = \alpha$ (O cố định, α cho trước);

(D) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' mà: $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ ($\vec{a}$ cho trước).

3. Trong mặt phẳng, các quy tắc sau đây, quy tắc nào là phép biến hình?

(A) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho MM' có độ dài không đổi bằng a;

(B) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}$ (Với A là điểm cho trước);

(C) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho tam giác M'AM là tam giác vuông tại A (A là điểm cho trước);

(D) Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho tam giác M'AM là tam giác cân tại A (A là điểm cho trước)

4. Trong mặt phẳng, các quy tắc sau đây, quy tắc nào không phải là phép biến hình?

(A) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (O là điểm cố định, $k \neq 0$ cho trước);

(B) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d cố định;

(C) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho M' là giao điểm của đường thẳng d đi qua M với đường tròn cố định (O);

(D) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho đoạn thẳng MM' nhận đường thẳng d cho trước là đường trung trực.

5. Ảnh của một điểm qua phép biến hình là?

(A) Một đoạn thẳng ; (B) Một đường thẳng ;

(C) Một tia ; (D) Một điểm.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(C)	(B)	(C)	(D)

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Qua phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$ và $\vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.

Vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là phép đồng nhất.

2. Tính chất

a) Tính chất 1: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra M'N' = MN.

b) Tính chất 2. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến

tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

3. Biểu thức tọa độ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{V} = (a;b)$. Với mỗi điểm M(x; y) ta có M'(x'; y') là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{V}$. Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{V}}$.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. (Bài 1 – trang 7 SGK). Chứng minh rằng: $M' = T_{\vec{V}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{V}}(M')$

Giải

Ta có: $M' = T_{\vec{V}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{V} \Leftrightarrow M = T_{-\vec{V}}(M')$ (đpcm)

Bài 2.(Bài 2 – trang 7 SGK). Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$. Dựng điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ biến D thành A.

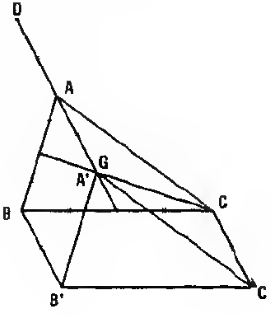
Giải

Gọi A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ ta có $T_{\overrightarrow{AG}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow A' = G$

Tương tự: $B' = T_{\overrightarrow{AG}}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AG}$ hay B' là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABB'G.

$C' = T_{\overrightarrow{AG}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG}$ hay C' là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACC'G. Vậy $\Delta A'B'C'$ là ảnh của ΔABC đã dựng được.

Ta có: $T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AG}$ hay D là điểm nằm trên đường thẳng đi qua AG và AD = AG.



Bài 3 (Bài 3 – trang 7 SGK) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{V}$ (–1;2), A(3;5), B(–1;1) và đường thẳng d có phương trình x – 2y + 3 = 0.

a) Tìm tọa độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{V}$

b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{V}$.

c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{V}$.

Giải

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{V}}$ là $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

a) Gọi $A'(x_{A'}; y_{A'}); B'(x_{B'}; y_{B'})$ ta có:

$$\begin{cases} x_{A'} = x_A - 1 \\ y_{A'} = y_A + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 - 1 = 2 \\ y_{A'} = 5 + 2 = 7 \end{cases} \text{ hay } A'(2;\ 7)$$

$$\begin{cases} x_{B'} = x_B - 1 \\ y_{B'} = y_B + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = -2 \\ y_{B'} = 3 \end{cases} \quad \text{hay } B'(-2;\ 3)$$

b) A là ảnh của C qua $T_{\vec{V}}$ thì ta có: $\begin{cases} x_A = x_C - 1 \\ y_A = y_C + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = x_A + 1 \\ y_C = y_A - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \text{ hay } C(4;\ 3)$$

c) Gọi $M \in d$ ta có $M(2a - 3; a)$, gọi $M' = T_{\vec{V}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M - 1 \\ y_{M'} = y_A + 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2a - 4 \\ y_{M'} = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x_{M'} = 2(y_{M'} - 2) - 4 \Leftrightarrow x_{M'} - 2y_{M'} + 8 = 0$$

hay M' nằm trên đường thẳng d': x – 2y + 8 = 0 là ảnh của d qua $T_{\vec{V}}$.

Bài 4. (Bài 4 – trang 8 SGK). Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến a thành b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế?

Giải

Phép tịnh tiến $T_{\vec{V}}$ với vectơ $\vec{V}$ bất kì khác với các vectơ chỉ phương của a và b đều biến a thành b. Vậy có vô số phép tịnh tiến như trên.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho A(–2; 4), $\vec{V}$=(3; –2). Ảnh A' của A qua phép tịnh tiến theo $\vec{V}$ có toạ độ là:

(A) (1; 2); (B) (–1; 2); (C) (1; –2); (D) (–1; –2)

2. Cho A(2; –1), $\vec{V}$ = (3; 4). Tạo ảnh của A qua phép tịnh tiến theo $\vec{V}$ có tọa độ là:

(A) (–1; –5) ; (B) (1; 5); (C) (1; –5) ; (D) (–1; 5).

3. Cho phép tịnh tiến T_V và A(3; 4); B(–2; 5). Biết T_V (A) = B. Toạ độ của vectơ tịnh tiến $\vec{V}$ là:

(A) (5; 1); (B) (5; –1); (C) (–5; 1); (D) (–5; –1)

4. Cho A(1; 2); B(–3; –4). Gọi A' = T_V (A); B' = T_V (B), độ dài đoạn thẳng A'B' là:

(A) 52 ; (B) 25 ; (C) $\sqrt{25}$; (D) $\sqrt{52}$.

5. Cho đường thẳng d : 2x – y + 1 = 0 và $\vec{V}$ = (3; 7) Gọi d' = T_V(d), phương trình đường thẳng d' là

(A) 2x – y – 1 = 0 ; (B) 2x – y = 0 ;

(C) 2x – y + 1 = 0 ; (D) 2x – y + 2 = 0.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(A)	(C)	(D)	(B)

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. **Định nghĩa:** Cho đường thẳng d, phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM', được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục.

• Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng hay là trục đối xứng, phép đối xứng trục d được kí hiệu là $Đ_d$. Nếu $\mathscr{H}'$ là ảnh của $\mathscr{H}$ qua $Đ_d$ thì ta nói $\mathscr{H}$ đối xứng với $\mathscr{H}'$ qua d, hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua d.

• M' = $Đ_d$ (M) $\Leftrightarrow$ M = $Đ_d$(M')

2. Biểu thức tọa độ

a) Nếu ta chọn hệ tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với đường thẳng d và có điểm M = (x; y), M' = $Đ_d$ (M) = (x' ; y') thì

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Ox.

b) Nếu ta chọn hệ tọa độ Oxy sao cho trục Oy trùng với đường thẳng d và có điểm M = (x; y), M' = $Đ_d$(M) = (x'; y') thì

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Oy.

3. Tính chất

a) **Tính chất 1**: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

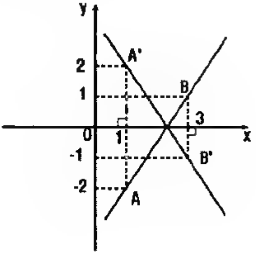
b) **Tính chất 2**: Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, Biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. **Trục đối xứng của một hình**: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng qua d biến $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó ta nói $\mathscr{H}$ là hình có trục đối xứng.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. (Bài 1 – trang 11 SGK). Trong mặt phẳng Oxy cho A(1; –2) và B(3; 1). Tìm ảnh của A, B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

Giải



Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A và B qua phép đối xứng trục Ox. Ta có:

$$\begin{cases} x_A = x_A \\ y_A = -y_A \end{cases}; \begin{cases} x_B = x_B \\ y_{B'} = -y_B \end{cases}$$

do đó A(1; 2); B'(3; –1).

Khi đó đường thẳng A'B': $3(x - 1) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0$ là ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

Bài 2. (Bài 2 – trang 11, SGK)

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

Giải

$M \in d$ thì $M(a; 3a + 2)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy. Ta có:

$$\begin{cases} x_M = -x_M \\ y_M = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -a \\ y_M = 3a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow y_M = -3x_M + 2$$

$\Leftrightarrow 3x_M + y_M - 2 = 0$ hay $d': 3x + y - 2 = 0$ là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

Bài 3 (Bài 3 – trang 11, SGK) Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng?

W

V I E T N A M

O

Giải

Các chữ sau đây có trục đối xứng: V, T, E, T, A, M, W, O

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Ảnh của A(5; –15) qua phép đối xứng trục Ox là:

(A) (5; 15); (B) (–5; 15) ; (C) (5; –15); (D) (–5; – 15).

2. Tạo ảnh của A(–3; –4) qua phép đối xứng trục Ox là:

(A) (3; 4); (B) (3; –4) ; (C) (–3; 4); (D) (–3; –4).

3. Ảnh của A(–2; 1) qua phép đối xứng trục Oy là:

(A) (2; –1); (B) (–2; –1) ; (C) (–2; 1); (D) (2; 1).

4. Cho A(3; –2), B(1; 4), gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép đối xứng trục Ox.

Độ dài đoạn thẳng A'B' là:

(A) $2\sqrt{10}$; (B) $\sqrt{10}$; (C) $\sqrt{20}$; (C) 40.

5. Cho đường thẳng d: $2x - 3y + 4 = 0$, gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng Oy. Phương trình đường thẳng d' là:

(A) $2x - 3y - 1 = 0$; (B) $2x + 3y - 4 = 0$;

(C) $2x + 3y + 4 = 0$; (D) $2x - 3y + 4 = 0$;

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(D)	(A)	(B)

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa:

- Cho điểm I, phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I. Điểm I được gọi là tâm đối xứng.
- Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Đ_I$.
- Nếu hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình ($\mathscr{H}$) qua $Đ_I$ thì ta còn nói $\mathscr{H}'$ đối xứng với $\mathscr{H}$ qua $Đ_I$, hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua I.
- $M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm qua gốc tọa độ.

Trong hệ tọa độ Oxy cho M = (x; y), M' = $Đ_O$(M) = (x'; y') khi đó;

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục qua gốc tọa độ.

3. Tính chất

a) Tính chất 1: Nếu $Đ_I(M) = M'$ và $Đ_I(N) = N'$ thì $\Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra M'N' = MN.

b) Tính chất 2: Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. Tâm đối xứng của một hình: Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó ta nói $\mathscr{H}$ là hình có tâm đối xứng.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. (Bài 1 – Trang 15 SGK)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(–1; 3) và đường thẳng d có phương trình x – 2y + 3 = 0. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O..

Giải

Gọi A'(x'; y') là ảnh của A qua $Đ_O$, khi đó:

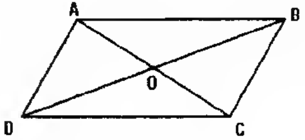
$\begin{cases} x' = -(-1) \\ y' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -3 \end{cases}$ hay A' (1; –3) là ảnh của A qua $Đ_O$. Gọi d' là ảnh của d qua $Đ_O$, khi đó vectơ pháp tuyến của d' là $\vec{n} = (1;-2)$ và A' thuộc d' nên d': $1(x-1) - 2(y+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 7 = 0$. Vậy d': $x - 2y - 7 = 0$ là ảnh của d qua $Đ_O$.

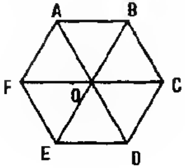
Bài 2. (Bài 2 – trang 15 SGK)

Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng?

Giải

Trong các hình trên thì hình bình hành và lục giác đều có tâm đối xứng.





Bài 3. (Bài 3 – trang 15 SGK)

Tìm một hình có vô số tâm đối xứng.

Giải

Đường thẳng là hình có vô số tâm đối xứng vì với mọi điểm I thuộc đường thẳng d thì $Đ_I(d) = d$.

Tương tự như vậy hình gồm hai đường thẳng song song cũng là hình có tâm đối xứng. Thật vậy cho a // b, gọi d là đường thẳng cách đều hai

đường thẳng a, b. Với I là điểm bất kì trên d thì $Đ_I(a) = b$, $Đ_I(b) = a$ hay với I thuộc d thì $Đ_I$ biến hình gồm hai đường thẳng song song thành chính nó. Vậy hình gồm hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho A(–4; 7), ảnh của A qua $Đ_O$ có tọa độ là:

   (A) (–4; –7) ; (B) (4; –7) ; (C) (–4; 7); (D) (4; 7).

2. Cho M'(2; 5), tạo ảnh M của M' qua $Đ_O$ có tọa độ là:

   (A) (–2; –5) ; (B) (2; 5) ; (C) (2; –5); (D) (–2; 5).

3. Cho đường thẳng d: $2x - y + 4 = 0$, ảnh d' của d qua $Đ_O$ có phương trình:

   (A) $x - 2y + 4 = 0$; (B) $x + 2y + 4 = 0$;

   (C) $2x - y + 4 = 0$; (D) $2x - y - 4 = 0$.

4. Cho đường thẳng d': $3x - y + 4 = 0$, tạo ảnh d của d' qua $Đ_O$ có phương trình:

   (A) $3x + y + 4 = 0$; (B) $3x + y - 4 = 0$;

   (C) $3x - y - 4 = 0$; (D) $3x - y + 4 = 0$.

5. Cho I(1; 2), A(3, 4). Ảnh A' của A qua $Đ_I$ có tọa độ là:

   (A) (–1; 0) ; (B) (2; 3) ; (C) (2; 2) ; (D) (1; 0).

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(D)	(C)	(A)

§5. PHÉP QUAY

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa

• Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM, OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α.

• Điểm O được gọi là tâm quay còn α gọi là góc quay của phép quay đó.

• Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\ \alpha)}$

• Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác.

• Với k là số nguyên ta luôn có: Phép quay $Q_{(O,\ 2k\pi)}$ là phép đồng nhất, phép quay $Q_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O.

2. Tính chất

a) Tính chất 1:

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

b) Tính chất 2.

Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

c) Nhận xét: Phép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α (nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng $\pi - \alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$)

II. Bài tập căn bản

Bài 1 (Bài 1 – trang 19 SGK). Cho hình vuông ABCD tâm O (hình 1.38 SGK)

a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90^0.

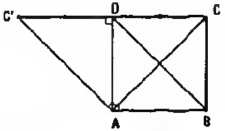
b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^0.

Giải

a) Gọi $C' = Đ_O(C)$ khi đó $\Delta ACC'$ cân tại A và $\widehat{ACD} = \widehat{AC'D} = 45^0$

Suy ra $\widehat{CAC'} = 90^0$ hay $(OC; OC') = 90^0$.

Khi đó $\begin{cases}(AC; AC') = 90^0\\ AC = AC'\end{cases}$ hay $C' = Q_{(A,90^0)}(C)$



b) Ta có: $\begin{cases}(AB; AD) = 90^0\\ AB = AD\end{cases}$

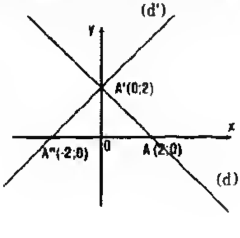
nên $D = Q_{(A,90^0)}(B)$. Vậy ảnh của đường thẳng BC qua phép quay $Q_{(A,90^0)}$ là đường thẳng đi qua C' và D hay chính là đường thẳng CD.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(2; 0) và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90^0.

Giải

Ta có điểm A'(0; 2) là ảnh của điểm A(2; 0) qua $Q_{(O,90^0)}$. Thật vậy:

$\begin{cases}\widehat{AOA'} = 90^0\\ OA = OA'\end{cases}$ (hình bên)



Gọi d' là ảnh của d qua $Q_{(O,90^0)}$ ta có A thuộc d nên A' thuộc d'. Mặt khác d' = $Q_{(O,90^0)}$ nên d' ⊥ d hay vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (-1;1) của d là vectơ pháp tuyến của d' vậy d':

$-1(x - 0) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho A(–1; 2); B(2; 3). Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A và B qua $Q_{(O,\alpha)}$. Độ dài đoạn thẳng A'B' là.

(A) 10 ; (B) $\sqrt{10}$; (C) 17 ; (D) $\sqrt{17}$.

2. Cho đường thẳng d và $Q_{(O,\alpha)}$, gọi d' = $Q_{(O,\alpha)}$, nếu $\alpha = 120^0$ thì góc giữa d và d' là

(A) 60^0 ; (B) 120^0 ; (C) 90^0; (D) -60^0

3. Cho A(2, –4) và A' là ảnh của A qua $Q_{(O,180^0)}$. Tọa độ của A' là :

(A) (2; –4) ; (B) (–2; 4) ; (C) (2; 4); (D) (–2; –4).

4. Cho A(–1; 5) và A' là ảnh của A qua $Q_{(O,360^0)}$. Tọa độ của A' là:

A(1; 5) ; (B) (1;– 5) ; (C) (–1; 5) ;(D) (–1; –5).

5. Cho đường thẳng d: 4x – 2y + 3 = 0 và d' là ảnh của d qua $Q_{(O,360^0)}$ phương trình của đường thẳng d là:

(A) –4x – 2y + 3 = 0 ; (B) 4x+ 2y + 3 = 0 ;

(C) 4x – 2y – 3 = 0 ; (D) 4x – 2y + 3 = 0 .

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(B)	(C)	(D)

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Khái niệm về phép dời hình:

• Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

• Nếu phép dời hình f biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì MN = M'N'.

• Nhận xét: Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình; phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

2. Tính chất: Phép dời hình:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

c) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý: Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp... của tam giác ABC cũng tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp... của tam giác A'B'C'.

3. Khái niệm hai hình bằng nhau: Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

II. Bài tập căn bản

Bài 1 (Bài 1 – trang 23, SGK)

Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(–3; 2) , B(–4; 5) và C(–1; 3).

a) Chứng minh rằng các điểm A'(2; 3); B'(5; 4) và C'(3; 1) theo thứ tự là ảnh của A, B và C qua phép quay tâm O góc -90^0.

b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^0 và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải

a) Ta có: $\vec{OA} = (-3;2), \vec{OA'} = (2;3)$ suy ra:

$$\left|\vec{OA}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}; \left|\vec{OA'}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{OA}\right| = \left|\vec{OA'}\right|$$

và $\vec{OA}.\vec{OA'} = -3.2 + 2.3 = 0$

Vậy $A' = Q_{(O,\ 90^0)}(A)$

Tương tự $\vec{OB} = (-4;5), \vec{OB'} = (5;4)$

Suy ra $\begin{cases} \vec{OB}.\vec{OB'} = -4.5 + 5.4 = 0 \\ \left|\vec{OB}\right| = \left|\vec{OB'}\right| = \sqrt{41} \end{cases}$

Vậy $B' = Q_{(O,\ 90^0)}(B)$

$\vec{OC} = (-1;3), \vec{OC'} = (3;1)$

Suy ra : $\begin{cases} \vec{OC}.\vec{OC'} = -1.3 + 3.1 = 0 \\ \left|\vec{OC}\right| = \left|\vec{OC'}\right| = \sqrt{10} \end{cases}$

Vậy $C' = Q_{O,\ 90^0}(C)$

Hai tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua $Q_{O,\ 90^0}$. (đpcm)

b) Từ câu a ta thấy ảnh của tam giác ABC qua $Q_{O,\ 90^0}$ là tam giác A'B'C'.

Vậy tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác A'B'C' qua phép đối xứng trục Ox.

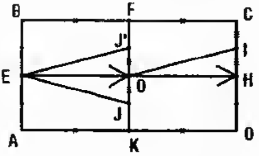
Ta có : $\begin{cases} x_{A_1} = x_A \\ y_{A_1} = y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A_1} = 2 \\ y_{A_1} = -3 \end{cases}$ hay $A_1(2; -3)$

Tương tự ta có: $B_1(5; -4)$, $C_1(3; -1)$

Bài 2. (Bài 2 – trang 24 SGK)

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Chứng minh hai hình thang AEJK và FOIC bằng nhau.

Giải



Xét phép đối xứng trục $Đ_{EH}$ ta có: $F = Đ_{EH}(K)$, $B = Đ_{EH}(A)$, $E = Đ_{EH}(E)$, $Đ_{EH}(J) = J'$ (J' là trung điểm OF). Vậy ảnh của hình thang AEJK qua $Đ_{EH}$ là

hình thang BEJ'F (1). Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{EO}}$ ta có $F = T_{\vec{EO}}(B)$, $I = T_{\vec{EO}}(J')$, $C = T_{\vec{EO}}(F)$, $O = T_{\vec{EO}}(E)$. Vậy hình thang FOIC là ảnh của hình thang BEJ'F qua $T_{\vec{EO}}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có tồn tại phép dời hình (thực hiện liên tiếp hai phép dời hình là đối xứng trục và tịnh tiến ta cũng được một phép dời hình) biến hình thang AEJK thành hình thang FOIC hay hai hình thang đó bằng nhau.

Bài 3 (Bài 3 – trang 24, SGK)

Chứng minh rằng: Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì với M là trung điểm của AB ta có M' = f(M) là trung điểm của A'B'. Thật vậy:

Vì M là trung điểm của AB nên MA = MB, mà $\begin{cases} MA = M'A' \\ MB = M'B' \end{cases}$

Do đó: M'A' = M'B' (1)

$$MA + MB = M'A' + M'B' = A'B' \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: M' là trung điểm của A'B'.

Khi đó gọi AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt các đường trung tuyến của ΔABC, gọi $A_1' = f(A_1)$, $B_1' = f(B_1)$, $C_1' = f(C_1)$.

Ta có A_1', B_1', C_1' lần lượt là trung điểm của các cạnh B'C', C'A', A'B' hay $A'A_1' = f(AA_1)$, $B'B_1' = f(BB_1)$, $C'C_1' = f(CC_1)$ lần lượt là các đường trung tuyến của tam giác A'B'C'. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, tức G là giao điểm của ba đường trung tuyến, gọi G' = f(G) khi đó G' phải là giao điểm của $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ hay G' là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A). Phép dời hình là phép biến hình không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

(B) Phép quay bảo toàn góc giữa hai đường thẳng bất kỳ.

(C) Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.

(D) Phép dời hình biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

2. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phép quay với góc quay 180^0 là phép đối xứng tâm.

(B) Phép quay với góc quay 360^0 là phép đối xứng tâm.

(C) Phép quay với góc quay 180^0 là phép đối xứng trục.

(D) Phép quay với góc quay 360^0 là phép đối xứng trục.

3. Cho tam giác đều ABC, ảnh của cạnh AC qua phép quay tâm A góc quay -60^0 là

(A) Cạnh BC ; (B) Cạnh AB ;

(C) Trung tuyến AM ; (D) Cạnh CA

4. Phép biến hình nào sau đây không phải là phép dời hình.

(A) Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc cạnh BC thành trung điểm của đoạn MA.

(B) Phép tịnh tiến

(C) Phép đối xứng tâm

(D) Phép đối xứng trục

5. Khẳng định nào sau đây đúng.

(A) Cho hai tam giác bằng nhau, luôn tồn tại một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia.

(B) Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C' đồng dạng với nhau, luôn tồn tại phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

(C) Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') với R>R' tồn tại phép dời hình biến đường tròn (O;R) thành (O'; R')

(D) Cho ba điểm A, B, C sao cho AB + BC = AC. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của ba điểm A, B, C qua một phép dời hình. Ta có: A'C' + C'B' = A'B'

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(B)	(A)	(A)

§7 PHÉP VỊ TỰ

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa:

• Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

• Phép vị tự tâm O, tỉ số k được kí hiệu là $V_{(O,\,k)}$.

• Nhận xét:

Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

Khi k = 1, phép vị tự là phép đồng nhất.

Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng tâm

$M' = V_{(O,\,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O;\frac{1}{k}\right)}(M')$

2. Tính chất

a) Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$

b) Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|.R$

3. Tâm vị tự của hai đường tròn

a) Định lí: Với hai đường tròn bất kỳ luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự đó được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

b) Cách tìm tâm vị tự của hai đường:

Cho hai đường tròn (I; R) và (I', R'), có ba trường hợp sau:

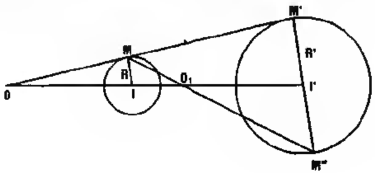
- *Trường hợp 1*: I trùng với I'.

Khi đó I cũng chính là tâm vị tự của hai đường tròn.

- *Trường hợp 2:* I khác với I' và $R \neq R'$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc (I; R), đường thẳng qua I' song song với IM và cắt (I'; R') tại M' và M".

Đường thẳng MM' cắt đường thẳng II' tại O nằm ngoài đoạn II', MM" cắt II" tại O_1 nằm trong đoạn II'. Ta có: $V_{\left(O;\frac{R'}{R}\right)}$, $V_{\left(O_1;-\frac{R'}{R}\right)}$ biến (I; R) thành (I'; R') O được gọi là tâm vị tự ngoài, O_1 được gọi là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.



• *Trường hợp 3*: I khác I' và R= R'

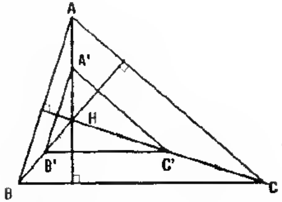
MM' // II' nên O_1 là tâm vị tự của hai đường tròn trên (tỉ số k = −1)

II. Bài tập căn bản

Bài 1. (Bài 1 – trang 29, SGK)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H , tỉ số $\frac{1}{2}$.

Giải



Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua $V_{(H,\frac{1}{2})}$ khi đó:

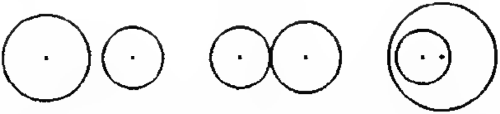
$\overrightarrow{HA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

hay A', B', C' lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC.

Bài 2. (Bài 2 – trang 29, SGK)

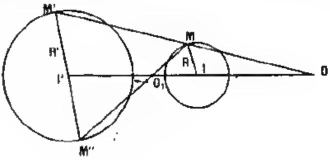
Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau (hình 1.62– SGK)

Giải



a) b) c)

a) Gọi hai đường tròn trên lần lượt là (I'; R') và (I; R) . Trên (I; R) lấy điểm M, qua I' dựng đường thẳng song song với IM cắt (I'; R') tại M', M" (hình trên) giả sử M và M' cùng phía đối với II', M, M" khác phía đối với II'. Khi đó O và O_1 lần lượt là giao điểm của MM', MM" với II' là tâm vị tự của hai đường tròn.



b) Làm tương tự câu a, ta có O vẫn là giao điểm nằm ngoài đoạn II' của MM' với II', tâm vị tự trong O_1 chính là tiếp điểm của hai đường tròn.

c) Cách làm tương tự câu a)

Bài 3. (Bài 3 – trang 29 SGK)

Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O.

Giải

Xét phép vị tự $V_{(O,k)}$, M là điểm bất kỳ, đặt $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ (1)

Xét phép vị tự $V_{(O,k')}$, đặt $M'' = V_{(O,k')}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM''} = k'.\overrightarrow{OM'}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $\overrightarrow{OM''} = k.k'.\overrightarrow{OM}$

Đặt $k_0 = k.k'$ ta có $\overrightarrow{OM''} = k_0.\overrightarrow{OM}$ hay tồn tại $V_{(O,k_0)}$ sao cho $M'' = V_{(O,k_0)}$ (M). Vậy khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O ta thu được một phép vị tự tâm O.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho $V_{(O,2)}$, M(1; 4), N(2; –3). Gọi M', N' là ảnh của M, N qua $V_{(O,2)}$ độ dài đoạn thẳng M'N' là.

(A) $2\sqrt{2}$; (B) $4\sqrt{2}$; (C) $5\sqrt{2}$; (D) $10\sqrt{2}$

2. Cho $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$ và M'N' = 5. Gọi M, N lần lượt là tạo ảnh của M', N' qua $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}$, độ dài đoạn thẳng MN là.

(A) 10 ; (B) 5 ; (C) 2,5 ; (D) 7,5.

3. Cho $\overrightarrow{MN} = (3;4)$, gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua $V_{(O,-2)}$ tọa độ của vectơ $\overrightarrow{M'N'}$ là:

(A) (–3;–4) ; (B) (–6;–8) ; (C) (3; 4); (D) (6; 8).

4. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) Phép vị tự tỉ số k biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng;

(B) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;

(C) Phép vị tự biến tam giác thành tam giác bằng nó;

(D) Phép vị tự biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|.R$.

5. Khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự là $V_{(O,k)}$ và $V_{(O,k')}$ ta được phép vị tự tâm O, tỉ số là:

(A) k+k' ; (B) k.k' ; (C) k−k' ;(D) $\frac{k}{k'}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(A)	(B)	(C)	(B)

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa

• Phép biến hình f được gọi là phép đồng dạng tỉ số k, (k > 0) nếu với hai điểm M, N bất kỳ và ảnh M', N' tương ứng của chúng. Ta luôn có M'N' = k.MN

• ***Nhận xét:***

Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số k = 1

Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được phép đồng dạng tỉ số pk.

2. Tính chất: Phép đồng dạng tỉ số k

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính k.R

Chú ý: Nếu một phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C'.

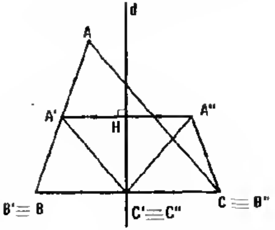
3. Hình đồng dạng: Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho tam giác ABC. Dựng ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC.

Giải

Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua $V_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}$, khi đó $V_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}(B) = B$, hay B' trùng với B.



$A' = V_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ hay A' là trung điểm của BA

$C' = V_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ hay C' là trung điểm của BC. Gọi tam giác A"B"C" là ảnh của tam giác A'B'C' qua phép đối xứng qua đường trung trực d của BC, khi đó

$Đ_d(B') = C$ hay B" trùng với C.

$Đ_d(C') = C'$ hay C" trùng với C'

$A" = Đ_d(A')$

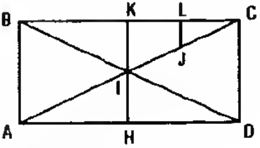
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên d. A' là điểm thỏa mãn điều kiện $\Leftrightarrow \overrightarrow{HA"} = -\overrightarrow{HA'}$ hay H là trung điểm của A'A".

Vậy tam giác A"B"C" vừa dựng trên là ảnh của tam giác ABC.

Bài 2. (Bài 2 – trang 33, SGK)

Cho hình chữ nhật ABCD, AC và BD cắt nhau tại I, Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.

Giải



Xét ΔCKI ta có LJ là đường trung bình nên $LJ = \frac{1}{2}KI = \frac{1}{2}IH$

Do đó $LJ = \frac{1}{2}IH$ (1)

Xét ΔBCD ta có KI là đường trung bình nên $KI = \frac{1}{2}DC$ (2)

Và $KL = \frac{1}{2}KC = \frac{1}{2}HD$ (3) $\quad IJ = \frac{1}{2}IC$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có: Hình thang JLKI là ảnh của hình thang IHDC qua phép đồng dạng tỉ số $\frac{1}{2}$. Vậy hai hình thang JLKI và hình thang IHDC là đồng dạng với nhau.

Bài 3. (Bài 3 – trang 33 – SGK)

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I(1 ; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$.

Giải

Gọi (I'; R') là ảnh của đường tròn (I; R) (R = 2) qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$

Ta có: $\overrightarrow{OI} = (1;1), \overrightarrow{OI'} = (x';y')$. Vì $I' = Q_{(O,45^\circ)}(I)$ nên

$$\begin{cases} \cos 45^0 = \dfrac{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OI'}}{|\overrightarrow{OI}|.|\overrightarrow{OI'}|} \\ |\overrightarrow{OI}| = |\overrightarrow{OI'}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} = \sqrt{x'^2+y'^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x'^2+y'^2} = x'+y' \\ \sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x' = \sqrt{2} \\ y' = 0 \end{cases}$ nhưng góc quay dương nên $I'\left(O;\sqrt{2}\right)$ và theo tính chất của phép quay thì R' = R = 2.

Gọi (I"; R") là ảnh của (I'; R') qua phép vị tự $V_{(O,\sqrt{2})}$, khi đó

$$I'' = V_{(O,\sqrt{2})}(I') \Leftrightarrow \overrightarrow{OI''} = \sqrt{2}\overrightarrow{OI'}$$

Mà $\overrightarrow{OI''} = (x'',y''), \overrightarrow{OI'} = \left(0;\sqrt{2}\right)$ nên $\begin{cases} x'' = \sqrt{2}.0 \\ y'' = \sqrt{2}.\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 2 \end{cases}$

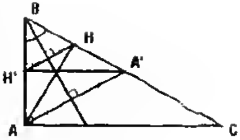
$\Leftrightarrow I''(0;2)$

và theo tính chất của phép vị tự thì $R'' = \sqrt{2}.R' = \sqrt{2}.2 = 2\sqrt{2}$. Vậy đường tròn (I") có phương trình: $x^2 + (y-2)^2 = 8$ là ảnh của đường tròn tâm I(1; 1) bán kính bằng 2 qua phép đồng dạng nói trên .

Bài 4 (Bài 4 – trang 33 – SGK)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến tam giác HBA thành tam giác ABC.

Giải



Gọi d là đường phân giác của góc B, xét đối xứng trục $Đ_d$ ta có: $A' = Đ_d(A) \Rightarrow A'$ là giao điểm của đường thẳng đi qua A với cạnh BC, $H' = Đ_d(H) \Rightarrow H'$ là giao điểm của đường thẳng đi qua H với AB.

$B = Đ_d(B)$. Vậy $\Delta H'BA'$ là ảnh của ΔHBA qua phép đối xứng trục $Đ_d$. Ta có

ΔHBA ΔABC nên $\Delta H'BA' \sim \Delta ABC$ do đó: $\dfrac{AB}{H'B} = \dfrac{AC}{H'A'} = \dfrac{AC}{AH}$

Xét phép vị tự $V_{\left(B,\frac{AC}{AH}\right)}$, ta có: $A = V_{\left(B,\frac{AC}{AH}\right)}(H')$, $C = V_{\left(B,\frac{AC}{AH}\right)}(A')$, $B = V_{\left(B,\frac{AC}{AH}\right)}(B)$

Hay ΔABC là ảnh của ΔHBA qua phép đồng dạng thu được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác của góc B và phép vị tự tâm B, tỉ số $\dfrac{AC}{AH}$.

III. Câu hỏi trắc nghiệm.

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

   (A) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số bằng -1;

   (B) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số bằng 1;

   (C) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số bằng $\dfrac{1}{2}$;

   (D) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số bằng $-\dfrac{1}{2}$.

2. Khẳng định nào sau đây đúng?

   (A) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $-k$;

   (B) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số k;

   (C) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$;

   (D) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $\dfrac{|k|}{2}$.

3. Khẳng định nào sau đây sai?

   (A) Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;

   (B) Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng;

   (C) Phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác bằng nó;

(D) Phép đồng dạng biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính k R.

4. Cho A(2; 5), B(4; 3), gọi A', B' là ảnh của A, B qua phép đồng dang tỉ số $\frac{3}{4}$, độ dài đoạn thẳng A'B' là:

(A) $2\sqrt{2}$; (B) $3\sqrt{2}$; (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$;(D) $\sqrt{2}$.

5. Gọi A_2, B_2 là ảnh của A, B qua phép đồng dạng liên tiếp lần lượt có tỉ số là 2 và 4. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $A_2B_2 = 2AB$; (B) $A_2B_2 = 4AB$;

(C) $A_2B_2 = 6AB$; (D) $A_2B_2 = 8AB$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(C)	(C)	(D)

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Thế nào là một phép biến hình, phép dời hình, phép đồng dạng? Nêu mối liên hệ giữa phép dời hình và phép đồng dạng.

Trả lời

• Phép biến hình là quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm nằm trong mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó.

• Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

• Phép đồng dạng là phép biến hình thỏa mãn: Nếu M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng qua phép biến hình thì ta có: M'N' = k.MN (k là tỉ số đồng dạng).

• Phép dời hình là trường hợp đặc biệt của phép đồng dạng. Phép đồng dạng tỉ số k = 1 là phép dời hình.

2.a) Hãy kể các phép dời hình đã học?

b) Phép đồng dang có phải là phép vi tự không?

Trả lời

a) Các phép dời hình đã học là: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay.

b) Phép đồng dạng không phải là một phép vị tự.

3. Hãy nêu một số tính chất đúng với phép dời hình mà không đúng đối với phép đồng dạng.

Trả lời

Các tính chất sau đây chỉ có ở phép dời hình.

• Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ

• Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

• Biến tam giác thành tam giác bằng nó.

• Biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. Thế nào là hai hình bằng nhau, hai hình đồng dạng với nhau? Cho ví dụ

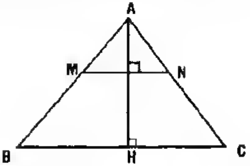
Trả lời

• Hai hình được gọi là bằng nhau nếu tồn tại một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

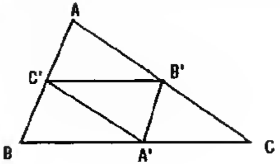
• Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

• Ví dụ

1) Cho tam giác cân ABC (tại A), đường cao AH. Khi đó ta có $\Delta HAB = \Delta HAC$ vì phép đối xứng trục $Đ_{AH}$ biến ΔHAB thành ΔHAC.



2) Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Ta có $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Vì có phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' (vì AB = 2A'B', AC = 2A'C' và BC = 2B'C')



5. Cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d. Hãy tìm một phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay, phép vị tự.

a) Biến A thành chính nó

b) Biến A thành B.

c) Biến d thành chính nó.

Trả lời

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$, phép đối xứng tâm A, phép đối xứng trục là đường thẳng đi qua A, phép quay, góc quay bằng 360^0, phép vị tự tâm A, biến A thành chính nó.

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$, phép đối xứng tâm với tâm đối xứng là trung điểm của AB, phép đối xứng trục, với trục là đường trung trực của AB phép quay tâm là trung điểm của AB, góc quay 180^0, phép vị tự tâm là trung điểm của AB, tỉ số -1.

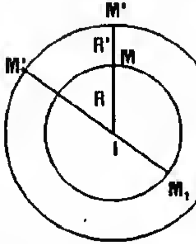
c) Phép tịnh tiến theo vectơ chỉ phương của d, phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng d, phép đối xứng tâm, với tâm nằm trên d, phép quay 360^0, phép vị tự có tâm vị tự nằm trên d.

6.Nêu cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Trả lời

Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; R'). Khi đó ta có các trường hợp sau:

• **Trường hợp 1**: I trùng với I'.

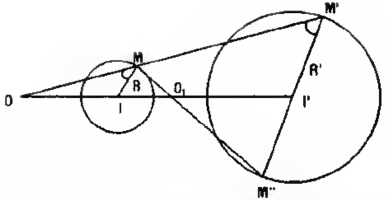


Khi đó phép vị tự $V_{\left(I,\frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(I,-\frac{R'}{R}\right)}$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R'). Thật vậy, gọi M là điểm thuộc (I; R) và $M' = V_{\left(I,\frac{R'}{R}\right)}(M)$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \frac{R'}{R}.\overrightarrow{IM}$ hay M' là giao điểm của tia IM với (I; R) do đó M' thuộc (I'; R'). Vậy (I'; R') là ảnh của (I; R) qua $V_{\left(I,\frac{R'}{R}\right)}$. Tương tự cho phép vị tự $V_{\left(I,-\frac{R'}{R}\right)}$

Vậy I là tâm vị tự của hai đường tròn trên.

• **Trường hợp 2**: I khác I' và $R \neq R'$



Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường tròn (I; R), đường thẳng qua I' song song với IM cắt đường tròn (I'; R') tại M', M" . Giả sử MM' cắt II' tại điểm O, MM" cắt II' tại O_1 (trong đoạn II_1).

Xét phép vị tự $V_{\left(O,\frac{R'}{R}\right)}$ ta có $V_{\left(O,\frac{R'}{R}\right)}(M) = M'$

Hay (I'; R') là ảnh của (I; R) qua $V_{\left(O,\frac{R'}{R}\right)}$

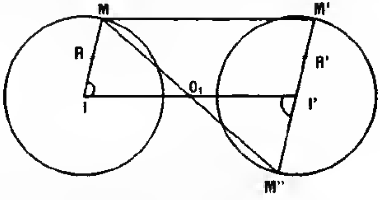
Vậy O là tâm vị tự của (I; R) và (I'; R')

Tương tự ta có: (I'; R') cũng là ảnh của (I; R) qua $V_{\left(O_1,-\frac{R'}{R}\right)}$.

Vậy O_1 là tâm vị tự của (I; R) và (I'; R')

Ta gọi O là tâm vị tự ngoài, O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn trên.

• **Trường hợp 3**: I khác I' và R = R'



Khi đó MM' // II' , gọi O_1 là giao điểm của MM" và II'

Xét $V_{\left(O_1,\frac{R'}{R}\right)}$, ta có $V_{\left(O_1,\frac{R'}{R}\right)}(M) = M"$ thuộc (I'; R') hay (I'; R') là ảnh của (I; R) qua $V_{\left(O_1,\frac{R'}{R}\right)}$

Vậy O_1 là tâm vị tự của (I; R) và (I'; R').

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{AB}$

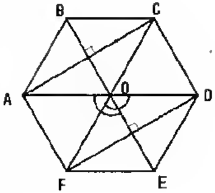
b) Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE

c) Qua phép quay tâm O góc 120^0.

Giải

a) Ta có: $T_{\vec{AB}}(A) = B$, $T_{\vec{AB}}(F) = O$, $T_{\vec{AB}}(O) = C$

nên tam giác BCO là ảnh của tam giác AOF qua $T_{\vec{AB}}$



b) $Đ_{BE}(A) = C$ (vì tứ giác ABCO là hình thoi nên AC và BO vuông góc với nhau tại trung điểm của AC và BO).

Tương tự $Đ_{BE}(F) = D$ và $Đ_{BE}(O) = O$ (vì O thuộc BE).

Vậy tam giác COD là ảnh của tam giác AOF qua $Đ_{BE}$

c) Sđ(OA,OE) = sđ(OF, OD) = 120^0 và OA = OE, OF = OD nên $Q_{(O,120^0)}(A) = (E)$, $Q_{(O,120^0)}(F) = D$ và

$Q_{(O,120^0)}(O) = O$

Vậy tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua $Q_{(O,120^0)}$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(–1; 2) và đường thẳng d có phương trình 3x + y + 1 = 0. Tìm ảnh của A và d.

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2,1)$

b) Qua phép đối xứng trục Oy.

c) Qua phép đối xứng qua gốc tọa độ

d) Qua phép quay tâm O góc 90^0.

Giải

a) Gọi A'(x'; y') là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$ ta có $\begin{cases} x' = -1 + 2 \\ y' = 2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

hay A'(1; 3) ta thấy $A \in d$

do đó đường thẳng d' qua A' và song song với d là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$

d': $3(x - 1) + 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0$

b) Gọi A' là ảnh của A qua phép đối xứng qua Oy ta có:

$\begin{cases} x' = -(-1) \\ y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay A'(1; 2), ta thấy $A \in d$ nên $A' \in d'$ là ảnh của d qua phép đối xứng qua Oy

Cho M(0; – 1) $\Rightarrow$ M $\in$ d gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng qua Oy do đó

d': $3(x - 1) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$

c) Gọi A' là ảnh của A qua phép đối xứng qua gốc tọa độ, khi đó:

$\begin{cases} x' = -(-1) \\ y' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ hay A'(1; –2), ta thấy $A \in d$ nên đường thẳng d' đi qua A' và song song với d là ảnh của d qua phép đối xứng qua gốc tọa độ

d': $3(x - 1) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$

d) Gọi A'(x'; y') là ảnh của A qua $Q_{(O,90^\circ)}$

ta có $\overrightarrow{OA'} = (x'; y')$, $\overrightarrow{OA} = (-1; 2)$ suy ra $\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Khi đó:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \\ \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OA'}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' + 2y' = 0 \\ \sqrt{5} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -1 \end{cases}$$

nhưng góc quay dương nên A'(–2; –1), gọi $d' = Q_{(O,90^\circ)}(d)$ ta có $d' \perp d$. Suy ra $\vec{n} = (-1; 3)$ là vectơ pháp tuyến của d'

Do đó $d': -1(x + 2) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 1 = 0$ (Vì $A' \in d'$)

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I(3; –2), bán kính 3.

a) Viết phương trình của đường tròn đó.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2; 1)$.

c) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng trục Ox.

d) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng qua gốc tọa độ.

Giải

a) Phương trình đường tròn tâm I(3; –2) bán kính R = 3 là:

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

b) Gọi $(I_1; R_1)$ là ảnh của (I, R) qua $T_{\vec v}$, khi đó

$$\overrightarrow{II_1} = \vec v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3 = -2 \\ y_1 + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ hay } I_1(1; -1) \text{ và } R_1 = R = 3$$

do đó đường tròn ảnh của (I; R) có phương trình:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

c) Gọi $(I_2; R_2)$ là ảnh của đường tròn (I; R) qua phép đối xứng trục Ox

Ta có: $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ hay $I_2(3; 2)$ và $R_2 = R = 3$ nên $(I_2; R_2)$ có phương trình:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

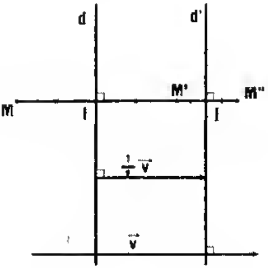
d) Gọi đường tròn $(I_3; R_3)$ là ảnh của đường tròn (I; R) qua phép đối xứng qua gốc tọa độ, suy ra I_3 đối xứng với I qua gốc tọa độ

Do đó $\begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 2 \end{cases}$ hay $I_3(-3; 2)$ và $R_3 = R = 3$ nên $(I_3; R_3)$ có phương trình:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Bài 4. Cho vectơ $\vec v$, đường thẳng d vuông góc với $\vec v$. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec v$. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec v$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp các phép đối xứng qua các đường thẳng d và d'.

Giải



Với M là điểm bất kỳ trong mặt phẳng, gọi $M' = Đ_d(M)$, $M'' = Đ_{d'}(M')$.

Ta có $MM' \perp d$, $M'M'' \perp d'$, d // d'

Suy ra $MM'' \perp d$, $MM'' \perp d'$. Gọi I, I' lần lượt là giao điểm của MM' với d, d'.

Khi đó $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IM'}, \overrightarrow{I'M'} = -\overrightarrow{I'M''}$

Suy ra: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'I'} + \overrightarrow{I'M''}$

$$= 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'I'}$$

$$= 2\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'I'}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{II'}$$

mà $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{2}\vec v$ nên $\overrightarrow{MM''} = 2.\frac{1}{2}\vec v = \vec v$

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ đã được phân tích thành hai phép đối xứng trục

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

Giải

Xét phép đối xứng trục $Đ_{IJ}$ vì ABCD là hình chữ nhật nên IJ ⊥ AB và IA = IB (I là trung điểm của AB, J là trung điểm CD).

Do đó $Đ_{IJ}(A) = B$

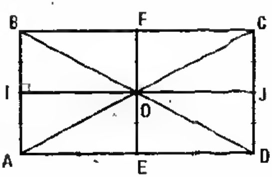
Tương tự: $Đ_{IJ}(E) = F$

Vì O thuộc IJ nên $Đ_{IJ}(O) = O$

Xét phép vị tự $V_{(B, 2)}$, ta có $V_{(B, 2)}(B) = B$

Vì F và O lần lượt là trung điểm của BC và BD nên $V_{(B, 2)}(F) = C$, $V_{(B, 2)}(O) = D$

Vậy tam giác BCD là ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng trên.



Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; −3), bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng trục qua trục Ox.

Giải

Gọi đường tròn $(I_1; R_1)$ là ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép vị tự $V_{(O, 3)}$.

Khi đó $\overrightarrow{OI_1} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -9 \end{cases}$ hay $I_1(3; -9)$ và $R_1 = 3.2 = 6$

Gọi đường tròn $(I_2; R_2)$ là ảnh của đường tròn $(I_1; R_1)$ qua phép đối xứng trục qua trục Ox.

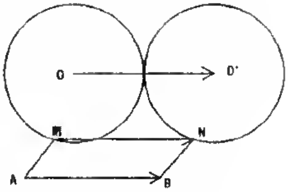
Ta có $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 9 \end{cases}$ hay $I_2(3; 9)$

Và $R_2 = R_1 = 6$ do đó đường tròn $(I_2; R_2)$ có phương trình:

$(x-3)^2 + (y-9)^2 = 36$ là ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng nói trên.

Bài 7. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O), dựng hình bình hành MABN. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

Giai



Tư giác MABN là hình bình hành khi và chỉ khi $\vec{MN} = \vec{AB}$.

Vậy N là ảnh của điểm M qua $T_{\vec{AB}}$.

Vì $M \in (O)$ nên $N \in (O')$ là ảnh của đường tròn (O) qua $T_{\vec{AB}}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1 Trong các phép biến hình sau phép nào không phải phép dời hình.

(A) Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng

(B) Phép đồng nhất

(C) Phép vị tư tỉ số -1

(D) Phép đối xứng trục

Giải

Trong các phép biến hình trên thì phép chiếu vuông góc lên một đường đường thẳng không phải phép dời hình vì nó không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Vậy đáp án (A) là đúng.

2 Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Giải

Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó chỉ khi đường thẳng đó song song với trục. Vậy đáp án (B) là sai.

3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các trường hợp sau:

(A) $\vec{v} = (2;1)$; (B) $\vec{v} = (2;-1)$;

(C) $\vec{v} = (1;2)$; (D) $\vec{v} = (-1;2)$.

Giải

Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến d thành chính nó khi vectơ tịnh tiến $\vec{v}$ là một vectơ chỉ phương của d. Vậy đáp án (C) đúng.

4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (2;-1)$ và điểm M(–3; 2). Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có tọa độ nào trong các tọa độ sau?

(A) (5; 3) ; (B) (1; 1) ; (C) (–1; 1) ; (D) (1; –1).

Giải

Gọi M'(x'; y') là ảnh của M qua $T_{\vec{v}}$ ta có: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

$$\begin{cases} x' + 3 = 2 \\ y' - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 1 \end{cases} \text{ hay } M'(-1;\, 1)$$

Vậy đáp án (C) đúng.

5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là:

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y + 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y + 1 = 0$.

Giải

$M\left(a; \dfrac{3a+1}{2}\right) \in d$, gọi M' là ảnh của M qua phép đối xứng qua trục Ox, khi đó

$$\begin{cases} x' = a \\ y' = -\dfrac{3a+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2y' = -(3x'+1) \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 1 = 0$$

Vậy d' là ảnh của d thì d': $3x + 2y + 1 = 0$, do đó đáp án (A) đúng

6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng qua phép đối xứng tâm O có phương trình là:

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y - 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y - 1 = 0$.

Giải

M(1; 1) ∈ d, gọi M' là ảnh của M qua $Đ_O$, khi đó

$\begin{cases} x' = -1 \\ y' = -1 \end{cases}$ hay $M'(-1;-1)$ và song song với d,do đó d': 3(x + 1) – 2(y + 1) = 0

⇔ $3x + 2y - 1 = 0$. Vậy đáp án (B) đúng.

7. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó;

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó;

(C) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó;

(D) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

Giải

Mọi điểm đối xứng trục chỉ biến mỗi điểm trên trục thành chính nó. Vậy đáp án (B) sai.

8. Hình vuông có mấy trục đối xứng?

A) 1 ; (B) 2 ; (C) 4 ; (D) vô số.

Giải

Hình vuông có trục đối xứng là hai đường chéo và hai đường thẳng đi qua hai trung điểm của cặp cạnh đối diện. Vậy đáp án (C) đúng.

9. Trong các hình sau, hình nào có vô số tâm đối xứng?

A) Hai đường thẳng cắt nhau ; (B) Đường Elip;

C) Hai đường thẳng song song ; (D) Hình lục giác đều.

Giải

Hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng nằm trên đường thẳng song song cách đều hai đường thẳng đó. Vậy đáp án (C) đúng

10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hai đường thẳng bất kỳ luôn đồng dạng;

(B) Hai đường tròn bất kỳ luôn đồng dạng;

(C) Hai hình vuông bất kỳ luôn đồng dạng;

(D) Hai chữ nhật bất kỳ luôn đồng dạng;

Giải

Cho hai hình chữ nhật lần lượt có các kích thước là a;b và a';b' nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì không tồn tại phép đồng dạng nào biến hình này thành hình kia, nên hai hình chữ nhật có kích thước như trên là không đồng dạng. Vậy đáp án (D) sai.

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Các tính chất thừa nhận

* Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt.

* Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng.

* Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có 2 điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

* Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng .

* Tính chất 5: Nếu 2 mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn 1 điểm chung khác nữa.

* Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Các cách xác định mặt phẳng: có 3 cách

• Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng.

• Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

• Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa 2 đường thẳng cắt nhau.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên cạnh AB, AC.

a) Chứng minh đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (ABC)

b) Khi EF cắt BC tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (DEF).

Giải

a) Ta có:

Vì

$$E \in AB \Rightarrow E \in (ABC)$$
$$F \in AC \Rightarrow F \in (ABC)$$

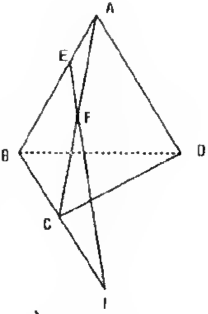
⇒ Đường thẳng EF nằm trong mp(ABC)

b) Vì:

$I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$

$I \in EF \Rightarrow I \in (DEF)$

⇒ I là điểm chung của 2 mặt phẳng (BCD) và (DEF).



Bài 2. Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α). Chứng minh M là điểm chung của (α) với mọi mặt phẳng bất kỳ chứa d

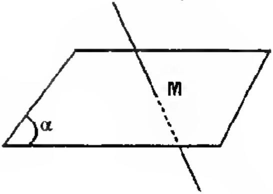
Giải

Gọi (β) là mặt phẳng bất kỳ chứa đường thẳng d.

Khi đó: $M \in d \Rightarrow M \in (\beta)$ và $M \in (\alpha)$

⇒ M là điểm chung của (α) và (β)

⇒ M là điểm chung của (α) với mọi mặt phẳng bất kỳ chứa d



Bài 3. Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng nằm trên 1 mặt phẳng và cắt nhau từng đôi một. Chứng minh 3 đường thẳng trên đồng quy.

Giải

Giả sử d_1, d_2, d_3 không đồng quy. Tức là: d_1 lần lượt cắt d_2 và d_3 tại A và B.

Gọi α là mặt phẳng qua 2 đường thẳng cắt nhau d_2 và d_3. Khi đó:

$A \in (\alpha)$, $B \in (\alpha)$ và $A \in d_1$, $B \in d_1$

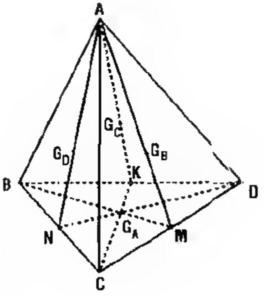
⇒ d_1 nằm trong mặt phẳng (α)

⇒ d_1, d_2, d_3 cùng nằm trên 1 mặt phẳng (trái với giả thiết)

⇒ d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi G_A, G_B, G_C, G_D lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC. Chứng minh rằng AG_A, BG_B, CG_C đồng quy.

Giải



Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, BC, BD.

Khi đó:

$$G_A \in BM \Rightarrow AG_A \subset (ABM)$$

$$G_B \in AM \Rightarrow BG_B \subset (ABM)$$

$\Rightarrow AG_A$ cắt BG_B

Tương tự: $AG_A \subset (ACK); CG_C \subset (ACK)$

$\Rightarrow AG_A$ cắt CG_C

và BG_B cắt CG_C (Vì BG_C, CG_B cắt nhau tại trung điểm AD).

$\Rightarrow AG_A$, BG_B, CG_C đồng quy (bài tập 3)

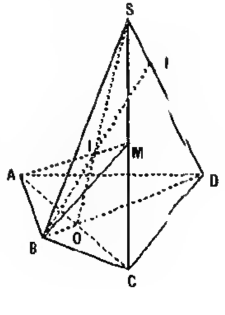
Hoàn toàn tương tự: BG_B, CG_C, DG_D đồng quy $\Rightarrow AG_A$, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy

Bài 5. Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn SC.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Giải



a) Giao điểm N của SD với (MAB). Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD. Gọi O là giao điểm của AC và BD và I là giao điểm của SO và AM thì (SBD) $\cap$ (ABM) = BI. Gọi N là giao điểm của BI và SD (trên mặt phẳng (SBD)) thì N là giao điểm của SD và mp (MAB).

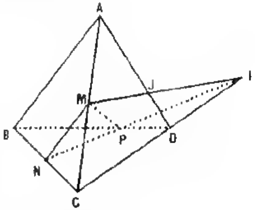
b) Theo câu a) ba đường thẳng SO, AM và BN đồng quy tại I.

Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP)

b) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Giải



a) Ta có:

NP không là đường trung bình của tam giác BCD nên NP cắt CD tại I

$\Rightarrow I \in CD$ và $I \in (MNP)$ nên I là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNP)

b) Ta có: M và I là hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) nên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) là đường MI.

Bài 7. Cho bốn điểm A.B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

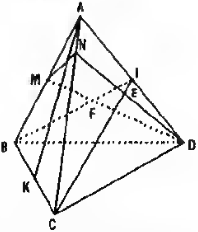
a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (KAD)

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Giải

a) Ta có:

$I \in AD \Rightarrow I \in (KAD) \Rightarrow$ I là điểm chung của 2 mặt phẳng (KAD) và (IBC).



$K \in BC \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow$ K là giao điểm chung của 2 mặt phẳng (KAD) và (IBC)

Vậy $(IBC) \cap (KAD) = IK$

b) Trong mặt phẳng (ACD), gọi E là giao điểm của CI và DN.

Trong mặt phẳng (ABD), gọi F là giao điểm của BI và DM

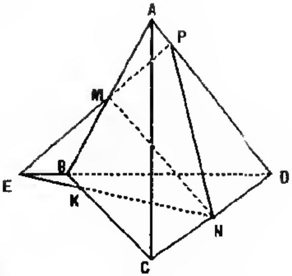
$\Rightarrow$ E, F là 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng (IBC) và (DMN) nên $(IBC) \cap (DMN) = EF$

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P nhưng không trùng với trung điểm của AD.

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (PMN) và (BCD)

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.

Giải



a) Ta có:

$E \in MP \Rightarrow E \in (PMN)$

$E \in BD \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow$ E là điểm chung của 2 mp(PMN) và (BCD)

Mà $N \in (PMN)$ và $N \in CD$

$\Rightarrow N \in (BCD)$

$\Rightarrow$ N là điểm chung của 2 mặt phẳng (PMN) và (BCD)

Vậy $(PMN) \cap (BCD) = EN$

b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi K là giao điểm của 2 đường thẳng EN và BC.

Khi đó: $K \in EN \Rightarrow K \in (PMN)$ và $K \in EN$

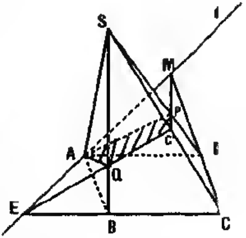
Vậy I là giao điểm của mp (PMN) và BC .

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm M của CD và mp (C'AE)

b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (C'AE).

Giải



a) Vì d không song song với cạnh hình bình hành nên gọi M là giao điểm của d và CD

$M \in CD$ và $M \in AE \Rightarrow M \in (C'AE)$

$\Rightarrow$ M là giao điểm của CD và (C'AE)

b) Trong mp (SCD), gọi P là giao điểm của SD và C'M

Trong mp (SBC), gọi Q là giao điểm của SB và C'E

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là tứ diện APC'Q

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM)

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC)

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC)

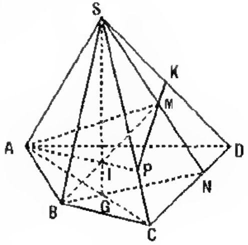
c) Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC)

d) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).

Giải

a) Trên mp (SCD) gọi N là giao điểm của SM và CD

$\Rightarrow$ N là giao điểm của CD và mp (SBM)



b) Gọi Q là giao điểm của BN và AC (trên mặt phẳng (ABCD)).

$\Rightarrow$ S và Q là 2 điểm chung của 2 mặt phẳng (SBM) và (SAC)

$\Rightarrow$ (SBM) $\cap$ (SAC) = SQ

c) Gọi I là giao điểm của SQ và BM (trên mặt phẳng (SBM))

Vì SQ $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ I là giao điểm của BM và mp(SAC)

d) Trên mp (SAC) gọi P là giao điểm của AI và SC

Vì I $\in$ BM AI $\subset$ (ABM) $\Rightarrow$ P là giao điểm của SC và mp(ABM).

Trên mp (SCD) gọi K là giao điểm của SD và PM

Vì K $\in$ PM $\Rightarrow$ K $\in$ (ABM)

$\Rightarrow$ 2 mặt phẳng (SCD) và (ABM) có 2 điểm chung P và K

$\Rightarrow$ (SCD) $\cap$ (ABM) = PK

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

(A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa;

(B) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất;

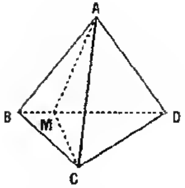
(D) Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

2 Thiết diện của một tứ diện có thể là:

(A) Tam giác (B) Tứ giác

(C) Ngũ giác (D) Tam giác hoặc tứ giác

3. Cho hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng

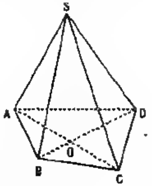
(A) Giao tuyến của 2 mp (MAC) và (ACD) là AC;

(B) Giao tuyến của 2 mp (ABM) và (AMD) là AM;

(C) Giao tuyến của 2 mp (MBC) và (MCD) là MC;

(D) Giao tuyến của 2 mp (MBC) và (BCD) là BC.

4. Cho hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng

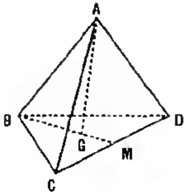
(A) Giao tuyến của 2 mp (OAB) và (OCD) là AC;

(B) Giao tuyến của 2 mp (SBD) và (ABCD) là BD;

(C) Giao tuyến của 2 mp (SAC) và (SBD) là SA;

(D) Giao tuyến của 2 mp (SAD) và (SBC) là SO.

5. Cho hình vẽ



Khẳng định nào sau đây sai:

(A) G là giao điểm của đường thẳng AG và một mặt phẳng (BCD);

(B) Giao tuyến của 2 mặt phẳng(AMB) và (BCD) là BM;

(C) G là giao điểm của đường thẳng AG và mặt phẳng (ABC);

(D) Giao tuyến của 2 mp (ABG) và (ADG) là AG.

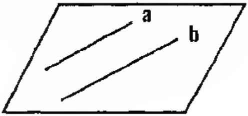
IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(D)	(A)	(B)	(C)

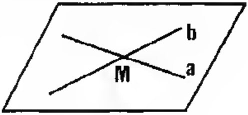
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. Tóm tắt lý thuyết

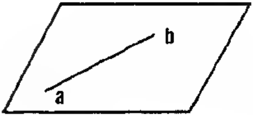
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian



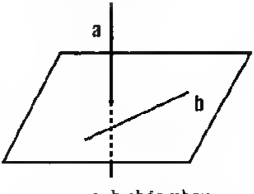
a // b



a cắt b



a ≡ b



a, b chéo nhau

2. Tính chất

• Định lí 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

• Định lí 2: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song

* Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cùng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

• Định lí 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

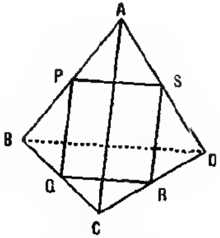
II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R và S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì

a) Ba đường thẳng PQ, SR và AC hoặc song song với nhau hoặc đồng quy.

b) Ba đường thẳng PS, RQ và BD hoặc song song với nhau hoặc đồng quy.

Giải



a) Ta có:

(PQRS) ∩ (ABC) = PQ

(PQRS) ∩ (ACD) = RS

(ABC) ∩ (ACD) = AC

Theo định lí về giao tuyến của 3 mp thì PQ, RS, AC hoặc đôi một cắt nhau hoặc đồng quy.

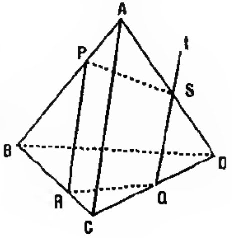
b) Chứng minh tương tự.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR) trong 2 trường hợp sau đây:

a) PR song song với AC

b) PR cắt AC

Giải



a) Trường hợp PR // AC

Hai mp (PQR) và (ACD) có điểm chung Q và lần lượt chứa 2 đường thẳng song song PR và AC ⇒ Giao tuyến của (PQR) và (ACD) qua Q và song song với AC

⇒ (PQR) ∩ (ACD) = Qt với Qt // AC

Gọi S là giao điểm của Qt và AD.

Khi đó S là giao điểm của AD và (PQR)

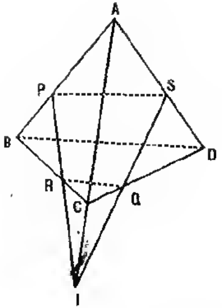
b) Trường hợp PR cắt AC.

Giả sử I là giao điểm của PR và AC

$\Rightarrow$ (PQR) $\cap$ (ACD) = QI

Trong mp (ACD), gọi S là giao điểm của QI và AD

$\Rightarrow$ S là giao điểm của AD và mp(PQR)



Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mp (BCD)

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx // AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và BM' = M'A' = A'N

c) Chứng minh GA = 3GA'

Giải

a) Ta có: $G \in MN \Rightarrow G \in (ABN)$

Gọi A' là giao điểm của AG và BN (trong mp (ABN))

Vì (ABN) $\cap$ (BCD) = AN

$\Rightarrow$ A' là giao điểm của AG và mp(BCD)

b) Ta có:

Mx//AA'. Mà M và AA' nằm trên mp(ABN)

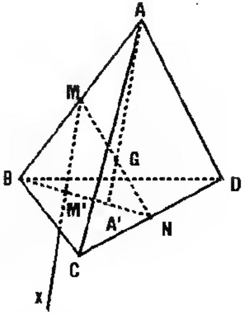
$\Rightarrow$ Mx nằm trên mp(ABN)

Gọi M' là giao điểm của Mx và BN.

Vì (ABN) $\cap$ (BCD) = BN $\Rightarrow$ M' là giao điểm của Mx và mp(BCD)

$\Rightarrow$ M', A', B nằm trên đường thẳng BN

$\Rightarrow$ B, M', A' thẳng hàng.



Trong mp (ABN) xét Δ BAA' có: M' là trung điểm của AB; MM' // AA' $\Rightarrow$ MM' là đường trung bình của Δ BAA' $\Rightarrow$ M' là trung điểm của BA' hay BM' = M'A' (1).

Trong mp (ABN) xét Δ NM'M có : G là trung điểm của MN, A'G // MM'

$\Rightarrow$ A'G là đường trung bình của Δ NM'M $\Rightarrow$ M'A' = A'N (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BM' = M'A' = A'N

c) Theo câu b) Ta có

MM' là đường trung bình của Δ BAA' $\Rightarrow$ AA' = 2MM' (1)

A'G là đường trung bình của Δ NMM' $\Rightarrow$ MM' = 2 A'G (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AA' = 4GA'

$\Rightarrow$ GA + GA' = 4GA' $\Rightarrow$ GA = 3GA'

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau;

(B) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung;

(C) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau;

(D) Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Câu 2. Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung A. Hai đường thẳng a, b song song với nhau (a, b không đi qua A) lần lượt nằm trên 2 mặt phẳng (α) và (β). Khi đó 3 đường thẳng a, b và giao tuyến của (α) và (β).

(A) Đôi một cắt nhau ; (B) Đồng quy;

(C) Đôi một song song ;

(Đ) C cắt 2 đường thẳng song song a, b .

Câu 3. Cho 3 mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3:

(A) Đôi một cắt nhau ; (B) Đôi một song song;

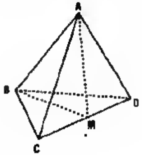
(C) Đồng quy ; (D) Đôi một song song hoặc đồng quy.

Câu 4. Trong không gian cho 3 đường thẳng a, b, c biết a//b, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

(A) Trùng nhau hoặc chéo nhau ; (B) Cắt nhau hoặc chéo nhau;

(C) Chéo nhau hoặc song song ; (D) Song song hoặc trùng nhau.

Câu 5. Cho hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là sai

A) AC và BD chéo nhau; B) AM và BC song song;

C) AM và BD chéo nhau; D) BM và AD chéo nhau.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(D)	(B)	(B)

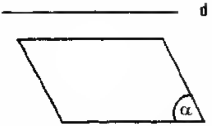
§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

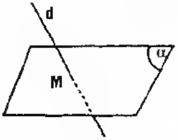
Cho đường thẳng d và mp (α), khi đó ta có các trường hợp sau:

• d và (α) không có điểm chung ta nói d và (α) song song với nhau,



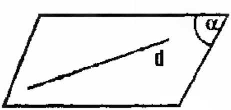
d // (α)

• d và (α) có một điểm chung ta nói d cắt (α)



$d \cap (\alpha) = M$

• d và (α) có từ hai điểm chung trở lên ta nói (α) chứa d.



$d \subset (\alpha)$

2. Tính chất

* Định lí 1: Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

* Định lí 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a

* Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

* Định lí 3: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

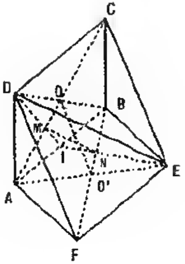
II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

Giải



a) Ta có:

OO' là đường trung bình của Δ DBF nên OO' // DF

$\Rightarrow$ OO' // (ADF)

Tương tự: OO' là đường trung bình của Δ ACE

$\Rightarrow$ OO' // CE $\Rightarrow$ OO' // (BCE)

b) Gọi I là trung điểm của AB thì DM và EN đều đi qua I và $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE}$ (tính chất trọng tâm)

$\Rightarrow$ MN // DE

mà DE nằm trong mp(CEF) và MN không nằm trong mp (CEF)

$\Rightarrow$ MM // (CEF)

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M song song với AC và BD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

Giải

a) Ta có

$(\alpha) \parallel AC$ và $AC \subset (ABC)$

$\Rightarrow$ AC song song với giao tuyến của (α) và (ABC)

Trên mp(ABC) kẻ MN // AC ($N \in BC$)

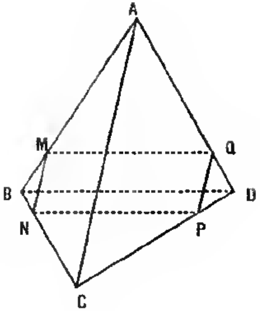
$\Rightarrow MN = (\alpha) \cap (ABC)$

$(\alpha) \parallel BD$ và $BD \subset (ABC)$

$\Rightarrow$ BD song song với giao tuyến của (α) và (BCD)

Trên mp (BCD) kẻ NP // BD ($P \in CD$)

$\Rightarrow NP = (\alpha) \cap (BCD)$



$(\alpha) \parallel AC$ và $AC \subset (ACD)$

$\Rightarrow$ AC song song với giao tuyến của (α) và (ACD)

Trên mp(ACD) kẻ PQ // AC ($Q \in AD$)

$\Rightarrow PQ = (\alpha) \cap (ACD)$

Ta thấy M và Q là 2 điểm chung của mp (α) và (ABD)

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MQ$

b) Theo câu a) ta có:

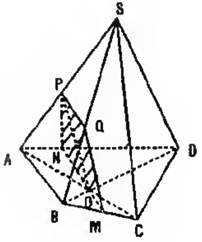
$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AC \\ PQ \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \quad (1)$$

và $(\alpha) \parallel BD$, $BD \subset (ABD) \Rightarrow BD \parallel MQ$

Mặt khác NP // AC $\Rightarrow$ NP // MQ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành

$\Rightarrow$ Thiết diện của tứ diện cắt bởi mp(α) là hình bình hành.



Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì?

Giải

AB // (α) nên (α) cắt mp(ABCD) theo giao tuyến qua O và song song với AB. Gọi M, N lần lượt là

giao điểm của đường thẳng qua O song song với AB cắt BC và AD.

Trong mp (SAC) kẻ OP // SC ($P \in AS$)

(α) cắt mp(SAB) theo giao tuyến PQ // AB ($Q \in SB$)

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là MNPQ

$$\left.\begin{matrix} MN /\!/ AB \\ PQ /\!/ AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN /\!/ PQ$$

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là hình thang.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mp (α). Giả sử a//b và b//(α). Khi đó:

(A) a// (α); (B) a$\subset$ (α); (C) a cắt (α); (D) a // (α) hoặc a$\subset$(α)

Câu 2. Cho 2 đường thẳng phân biệt a, b và mp(α). Giả sử a // (α) và b $\subset$ (α) Khi đó:

(A) a // b; (B) a, b chéo nhau ;

(C) a // b hoặc a, b chéo nhau; (D) a, b cắt nhau .

Câu 3. Cho d // (α), (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khi đó:

(A) d // d'; (B) d cắt d'; (C) d và d' chéo nhau; (D) d $\equiv$ d'.

Câu 4. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) Vô số.

Câu 5. Cho 2 đường thẳng phân biệt a, b và mp(α). Giả sử a // (α) và b // (α). Khi đó:

(A) a // b hoặc a cắt b hoặc a, b chéo nhau ;

(B) a // b hoặc a trùng b;

(C) a // b hoặc a cắt b;.

(D) a, b không có điểm chung.

IV. Đáp án

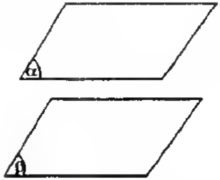
Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(A)	(A)	(C)

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa:

$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$

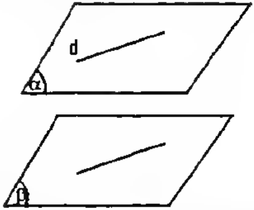


2. Tính chất

* Định lí 1: Nếu $(\alpha) // (\beta)$ thì mọi đường thẳng $a \subset (\alpha)$ ta có $a // (\beta)$.

* Định lí 2: Qua một điểm $A \notin (\beta)$ có một và chỉ một mp(α) sao cho $a \subset (\alpha)$ và $(\alpha) // (\beta)$

• Hệ quả 1: Nếu đường thẳng $d // (\alpha)$ thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mp $(\beta) // (\alpha)$



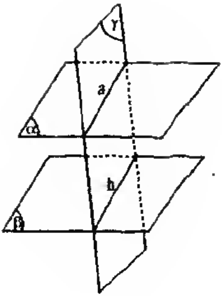
• Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

• Hệ quả 3: Cho $A \notin (\alpha)$. Mọi đường thẳng qua A và song song với (α) đều nằm trên mặt phẳng qua A và song song với (α).

* Định lí 3:

Cho $(\alpha) // (\beta)$; $(\alpha) \cap (\gamma) = a$; $(\beta) \cap (\gamma) = b$

Khi đó: a // b

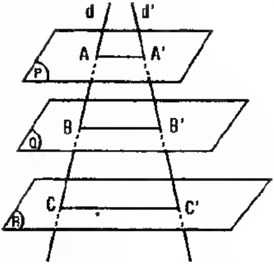


• Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

* Định lí 4: (Định lí Talet)

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$



II. Bài tập căn bản

Bài 1. Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ 4 đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b, c lần lượt lấy A', B' C' tùy ý

a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mp (A'B'C')

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

Giải

a) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a \,//\, b \\ AD \,//\, BC \\ a \cap AD = A \end{array}\right\} \Rightarrow (a, d) \,//\, (b, c)$$

Tương tự ta có: (a, b) // (c, d)

Vì hai mặt phẳng (a, b) và (c, d) song song với nhau nên mp(A'B'C) cắt 2 mặt phẳng này lần lượt theo 2 giao tuyến A'B' và C'D' song song với nhau.

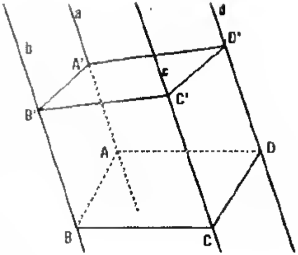
$\Rightarrow$ D' là giao điểm của đường thẳng qua C' và song song với A'B'

b) Theo câu a) ta có:

A'B' // C'D'

Tương tự vì (a,d) // (b,c) $\Rightarrow$ A'D' // B'C'

Vậy tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.



Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'

a) Chứng minh rằng AM song song với A'M'

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB'C') với đường thẳng A'M.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C')

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AM'M). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

Giải

a) Ta có

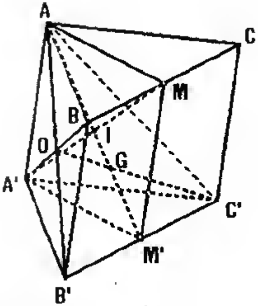
(ABC) // (A'B'C') $\Rightarrow$ mp (AA'M'M) cắt hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') theo hai giao tuyến AM và A'M'

$\Rightarrow$ AM // A'M'

b) Trên mp (AA'M'M), gọi I là giao điểm của AM' và A'M

Vì AM' $\subset$ (AB'C') $\Rightarrow$ I là giao điểm của A'M và mặt phẳng (AB'C')

c) Gọi O là giao điểm của AB' và A'B (Trên mặt phẳng (ABB'A'))



Khi đó: O và C' là 2 điểm chung của (AB'C') và (BA'C')

$\Rightarrow$ (AB'C') $\cap$ (BA'C') = OC'

$\Rightarrow$ giao tuyến d của 2 mặt phẳng (AB'C') và (BA'C') là đường thẳng OC'.

d) Trong mp (AM'M) gọi C là giao điểm của OC' và mặt phẳng (AM'M)

$\Rightarrow$ G là giao điểm của đường thẳng OC' và mặt phẳng (AM'M)

$\Rightarrow$ G là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (AM'M)

Vì C'O và AM' là trung tuyến của tam giác AB'C'

$\Rightarrow$ G là trọng tâm của Δ AB'C'

Bài 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

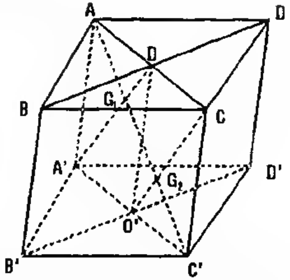
a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành 3 phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và AA'C'C. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp đã cho.

Giải



a) Ta có:

BB'D'D và A'B'CD là các hình bình hành nên:

BD // B'D' và DA' // B'C

$\Rightarrow$ Hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) có các cặp đường thẳng cắt nhau và song song với nhau từng đôi một.

$\Rightarrow$ (BDA') // (B'D'C)

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Trong mặt phẳng (AA'C'C), gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của AC' với A'O và O'C. Ta chứng minh G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của Δ A'BD và Δ CB'D'

Thật vậy ta có: $\Delta G_1OA \sim \Delta G_1A'C'$ (vì AC // A'C')

$$\frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AG_1}{A'O} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1 \text{ là trọng tâm của } \Delta \text{ A'BD.}$$

Tương tự G_2 là trọng tâm của ΔCB'D' . Vậy AC' đi qua G_1, G_2 là trọng tâm của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Theo câu b) ta có:

$$\frac{AG_1}{G_1C'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \text{ (Vì } \Delta G_1OA \sim \Delta G_1A'C')$$

$$\Rightarrow AG_1 = \frac{1}{3}AC' \ (1)$$

Tương tự:

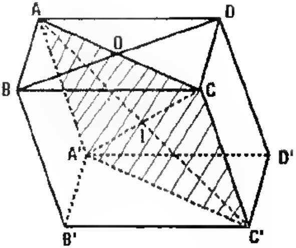
$$\frac{C'G_2}{G_2A} = \frac{C'O'}{CA} = \frac{1}{2} \text{ (Vì } \Delta G_2C'O' \sim \Delta G_2AC)$$

$$\Rightarrow C'G_2 = \frac{1}{3}AC' \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

Vậy G_1, G_2 chia đoạn AC' thành 3 phần bằng nhau.

d) Ta có



$O \in AC \Rightarrow O \in (ACC'A')$

$I \in (ACC'A')$ và

$A' \in (ACC'A')$

$\Rightarrow$ Hai mặt phẳng (A'IO) và (ACC'A') trùng nhau

$\Rightarrow$ Thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp là hình bình hành ACC'A'

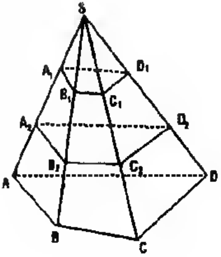
Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABCD) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Mặt phẳng (β) các các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh:

a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD

b) $B_1B_2 = B_2B, C_1C_2 = C_2C, D_1D_2 = D_2D$

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD.

Giải



a) Vì mặt phẳng (SAB) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (ABCD) theo hai giao tuyến lần lượt là A_1B_1 và AB

$\Rightarrow A_1B_1 // AB$.

$\Rightarrow A_1B_1$ là đường trung bình của ΔSAB

$\Rightarrow B_1$ là trung điểm của SB

Tương tự ta có:

B_1C_1 là đường trung bình của ΔSBC

$\Rightarrow C_1$ là trung điểm của SC

C_1D_1 là đường trung bình của Δ SCD

$\Rightarrow D_1$ là trung điểm của SD

b) Vì mp(SAB) cắt hai mặt phẳng song song (β) và (ABCD) theo 2 giao tuyến lần lượt là A_2B_2 và AB

$\Rightarrow A_2B_2 // AB$

$\Rightarrow A_2B_2$ là trung bình của hình thang A_1B_1BA

$\Rightarrow B_1B_2 = B_2B$

Tương tự: B_2C_2 là đường trung bình của hình thang B_1C_1CB

$\Rightarrow C_1C_2 = C_2C$

C_2D_2 là đường trung bình của hình thang C_1D_1DC

$\Rightarrow D_1D_2 = D_2D$

c) Có 2 hình chóp cụt có đáy là tứ giác ABCD đó là: $A_1B_1C_1D_1$.ABCD và $A_2B_2C_2D_2$.ABCD

III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu 2 mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β)

(B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β).

(C) Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì (α) // (β)

(D) Nếu đường thẳng đ song song với mp(α) thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong mp(α).

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau

(B) Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành

(C) Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau

(D) Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Trong hình chóp cụt thì hai đáy là 2 đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp tương ứng bằng nhau.

(B) Các mặt bên của hình chóp cụt là những hình thang.

(C) Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân

(D) Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm

Câu 4. Cho điểm $A \notin (\alpha)$, có bao nhiêu mặt phẳng qua A và song song với (α)

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) vô số

Câu 5. Cho hình chóp cụt tam giác ABC.A'B'C' có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) 2 ; (D) 1 .

IV Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(C)	(B)	(B)

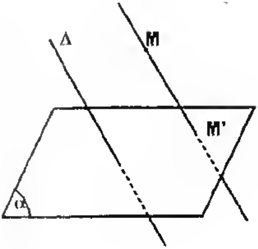
§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Phép chiếu song song

a) Định nghĩa:

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại M'. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương là đường thẳng Δ.



Khi đó

(α) gọi là mặt phẳng chiếu

Δ gọi là phương chiếu.

b) Tính chất

• Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

• Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng

• Phép chiếu song song biến 2 đường thẳng song song thành 2 đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

• Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của 2 đoạn thẳng nằm trên 2 đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

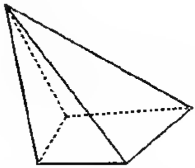
2. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ lên một mặt phẳng theo phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

II. Bài tập căn bản

Vẽ hình chóp tứ giác trong đó có 3 nét khuất.

Giải



III. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng.

(B) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng .

(C) Phép chiếu song song biến 2 đường thẳng song song thành 2 đường thẳng song song

(D) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài các đoạn thẳng nằm trên 2 đường thẳng song song .

Câu 2. Một tam giác bất kỳ có thể coi là hình biểu diễn của hình nào?

(A) Tam giác vuông ; (B) Tam giác cân ;

(C) Tam giác đều ; (D) Tam giác tùy ý.

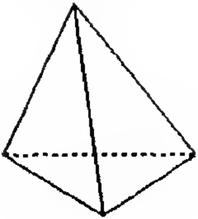
Câu 3 Một hình bình hành bất kỳ có thể coi là hình biểu diễn của hình nào?

(A) Hình vuông ; (B) Hình chữ nhật ;

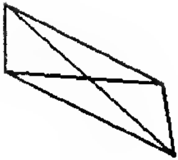
(C) Hình thoi ; (D) Hình bình hành tùy ý.

Câu 4 Trong các hình sau đây, hình nào không phải là hình biểu diễn của hình chóp tam giác

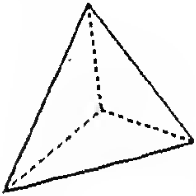
(A)



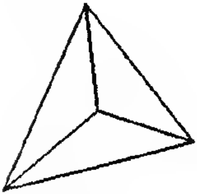
(B)



(C)

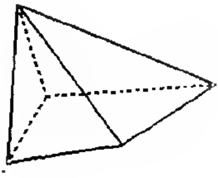


(D)

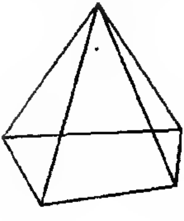


Câu 5. Trong các hình sau đây, hình nào là hình biểu diễn của hình chóp tứ giác.

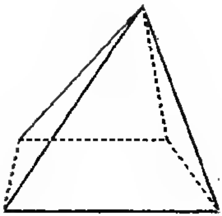
(A)



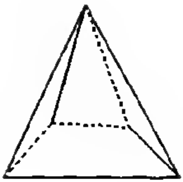
(B)



(C)



(D)



IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(D)	(Đ)	(B)	(A)

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG II

Câu 1. Hãy nêu 3 cách xác định mặt phẳng, kí hiệu mặt phẳng?

Trả lời

3 cách xác định mặt phẳng:

• Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng. Mặt khác qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu mp(ABC) hoặc (ABC).

• Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó. Mặt phẳng qua A và d ($A \notin d$).

Kí hiệu là mp(A, d) hoặc mp(d, A) hoặc (A, d) hoặc (d, A)

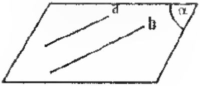
• Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa 2 đường thẳng cắt nhau. Hai đường thẳng a, b cắt nhau xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp (a, b) hoặc mp(b,a) hoặc (a, b) hoặc (b, a)

Câu 2. Thế nào là đường thẳng song song với đường thẳng? Đường thẳng song song với mặt phẳng? Mặt phẳng song song với mặt phẳng.

Trả lời

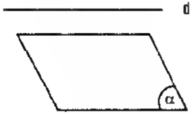
* Hai đường thẳng song song là 2 đường thẳng nằm cùng trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

a//b



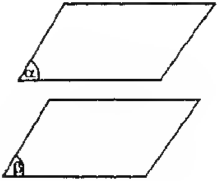
* Đường thẳng song song với mặt phẳng là đường thẳng không có điểm chung với mặt phẳng.

d // (α)



* Hai mặt phẳng song song với nhau là 2 mặt phẳng không có điểm chung

(α) // (β)



Câu 3. Nêu phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng?

Trả lời

Muốn chứng minh 3 điểm thẳng hàng ta chứng minh 3 điểm đó là các điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng sẽ nằm trên giao tuyến của 2 mặt phẳng đó nên thẳng hàng.

Câu 4. Nêu phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy?

Trả lời

Muốn chứng minh 3 đường thẳng đồng quy ta chứng minh 3 đường thẳng đó là giao tuyến từng đôi một của 3 mặt phẳng phân biệt và 3 đường thẳng đó không song song với nhau.

Câu 5. Nêu phương pháp chứng minh:

- Đường thẳng song song với đường thẳng.
- Đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Mặt phẳng song song với mặt phẳng.

Trả lời

* Phương pháp chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng:

- Chứng minh 2 đường thẳng đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng.
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.
- Áp dụng định lí về giao tuyến:

  $(\alpha)\cap(\beta)=d$, $a\subset(\alpha)$, $b\subset(\beta)$, $a\,//\,b \Rightarrow d\,//\,a\,//\,b$

* Phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng:

- Muốn chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) $(d\not\subset(\alpha))$. Ta chứng minh d // a. Trong đó $a\subset(\alpha)$.
- Muốn chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng ta chứng minh đường thẳng nằm trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

* Phương pháp chứng minh mặt phẳng song song với mặt phẳng.

Muốn chứng minh 2 mặt phẳng song song với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia.

Câu 6. Phát biểu định lí Ta-let trong không gian.

Trả lời

Ba mặt phẳng song song chắn trên 2 cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Câu 7. Nêu phương pháp dựng thiết diện tạo bởi một mặt phẳng với một hình chóp, hình hộp, hình lăng trụ.

Trả lời

Để dựng được thiết diện tạo bởi một mặt phẳng với một hình chóp, hình hộp, hình lăng trụ ta xác định giao tuyến của mặt phẳng với các mặt của hình chóp, hình hộp, hình lăng trụ đó. Thiết diện là đa giác tạo bởi các giao tuyến vừa tìm được.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hai hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

(AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF)

b) Lấy M là điểm thuộc DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE)

c) Chứng minh hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

Giải

a) Gọi O, O' lần lượt là giao điểm của đường chéo của 2 hình thang ABCD và ABEF.

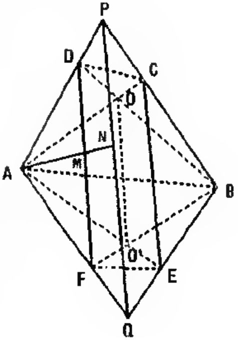
$\Rightarrow$ O, O' là 2 điểm chung của 2 mặt phẳng (AEC) và (BFD).

$\Rightarrow$ (AEC) $\cap$ (BFD) = OO'

Gọi P là giao điểm của AD và BC

Q là giao điểm của AF và BE

$\Rightarrow$ P, Q là 2 điểm chung của 2 mặt phẳng (BCE) và (ADF) $\Rightarrow$ (BCE) $\cap$ (ADF) = PQ.



b) Trên mặt phẳng (ADF) gọi N là giao điểm của AM và PQ.

Vì N $\in$ PQ $\Rightarrow$ N $\in$ (BCE) $\Rightarrow$ N là giao điểm của AM và mp (BCE)

c) Ta có

BF cắt mp (ABCD) tại B

Giả sử AC và BF cắt nhau. Vì AC $\subset$ (ABCD)

$\Rightarrow$ Giao điểm của BF và (ABCD) là giao điểm của AC và BF

⇒ AC và BF cắt nhau tại B

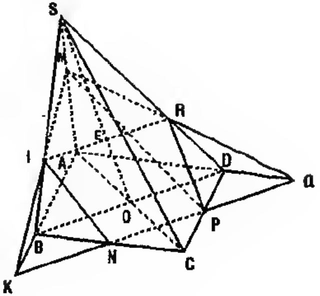
⇒ B ∈ AC (vô lí)

⇒ AC và BF không cắt nhau.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, BC, CD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Gọi O là tâm hình bình hành, tìm giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (MNP).

Giải



Trên mp (ABCD) gọi K là giao điểm của AB và NP. Trên mp (SAB), gọi I là giao điểm của MK và AB.

⇒ M, K là 2 điểm chung của 2 mp (MNP) và (SAB)

⇒ (MNP) ∩ (SAB) = MI

Trên mp (ABCD) gọi Q là giao điểm của AD và NP. Trên mp (SAD) gọi R là giao điểm của MQ và SD.

⇒ (MNP) ∩ (SAD) = MR

và (MNP) ∩ (ABCD) = NP

⇒ Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (MNP) là ngũ giác MINPR. Trên mp (SBD), gọi E là giao điểm của SO và IR.

Mà IR = (SBD) ∩ (MNP) ⇒ E là giao điểm của SO và (MNP).

Bài 3. Cho hình chóp đỉnh S có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN)

c) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi bởi mặt phẳng (AMN).

Giải

a) Trong mp(ABCD), gọi E là giao điểm của AD và BC

⇒ E, S là 2 điểm chung của 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC)

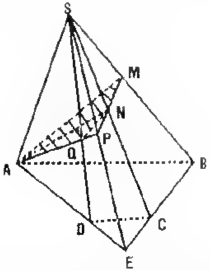
⇒ SE = (SAD) ∩ (SBC)

b) Trong mặt phẳng (SBC), gọi P là giao điểm MN và SE.

Trong mp (SAD), gọi Q là giao điểm của SD và AP.

Vì AP ⊂ mp (AMN) ⇒ Giao điểm của SD và mp (AMN) là Q

c) Từ câu b) ta thấy thiết diện của hình chóp SABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác AQNM.



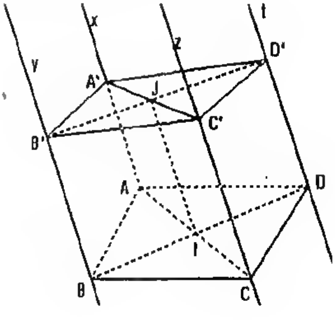
Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ 4 nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Đường thẳng ở cùng phía đối với mặt phẳng (ABCD), song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh (Ax, By) // (Cz, Dt)

b) Gọi I = AC ∩ BD, J = A'C' ∩ B'D'. Chứng minh IJ // AA'.

c) Cho AA' = x, BB' = y, CC' = z. Hãy tính DD'.

Giải



a) Ta có:

AB, Ax nằm trong mặt phẳng (Ax, By) lần lượt song song với CD, Dt nằm trong mp (Cz, Dt).

⇒ (Ax, By) // (Cz, Dt)

b) Trong hình thang AA'C'C ta có IJ là đường trung bình

⇒ IJ // AA'

c) Ta có:

IJ là đường trung bình của hình thang AA'C'C nên:

$$IJ = \frac{AA' + CC'}{2} = \frac{x + z}{2}$$

Mặt khác IJ là đường trung bình của hình thang B'BDD' nên:

$$IJ = \frac{BB' + DD'}{2} \Rightarrow DD' = 2.IJ - BB' = x + z - y$$

Vậy $DD' = x + z - y$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Câu 1. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa.

(B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

(C) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

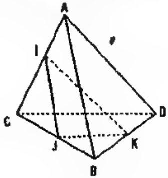
(D) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 2. Nếu 3 đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó:

(A) Đồng quy ; (B) Tạo thành tam giác ;

(C) Trùng nhau ; (D) Cùng song song với một mặt phẳng

Câu 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là:



(A) KD ; (B) KI ;

(C) Đường thẳng qua K và song song với AB ; (D) Không có.

Câu 4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

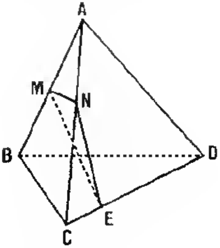
(A) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

(B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

(C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

(D) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên CD với ED = 3EC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là:



(A) Tam giác MNE

(B) Tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên BD

(C) Hình bình hành MNEF với F là điểm trên BD mà EF // BC

(D) Hình thang MNEF với F là điểm trên BD mà EF // BC

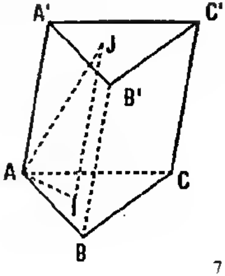
Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho là:

(A) Tam giác cân;

(B) Tam giác vuông;

(C) Hình thang;

(D) Hình bình hành.



Cho tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB, M là một điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Dùng giả thiết trên trả lời các câu 7, 8 sau đây:

Câu 7: Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện SABC là:

(A) Tam giác cân tại M ; (B) Tam giác đều ;

(C) Hình bình hành ; (D) Hình thoi .

Câu 8. Chu vi của thiết diện theo AM = x là:

(A) $x\left(1+\sqrt{3}\right)$; (B) $2x\left(1+\sqrt{3}\right)$;

(C) $3x\left(1+\sqrt{3}\right)$; (D) không tính được.

Câu 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz lần lượt là các đường thẳng song song với nhau đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng đi qua A cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với BB' = 2, DD' = 4. Khi đó CC' bằng :

(A) 3 ; (B) 4 ;

(C) 5 ; (D) 6 .

Câu 10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

(B) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

(D) Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB nằm trong 2 mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC). Dùng giả thiết trên trả lời câu hỏi 11, 12

Câu 11. Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp SABCD là hình gì?

(A) Tam giác ; (B) Hình bình hành;

(C) Hình thang ; (D) Hình vuông.

Câu 12. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng CD, DS, SA. Tập hợp các giao điểm I của 2 đường thẳng MQ và NP là:

(A) Đường thẳng ; (B) Nửa đường thẳng ;

(C) Đoạn thẳng song song với AB ; (D) Tập hợp rỗng.

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	(C)	(A)	(C)	(A)	(D)	(D)	(A)	(B)	(D)	(A)	(C)	(C)

CHƯƠNG III
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC
TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\vec{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}$...

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

- Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ vectơ trong mặt phẳng. Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng. Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong mặt phẳng.

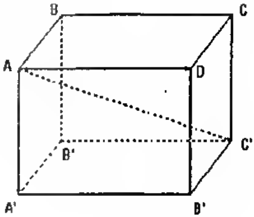
- Quy tắc hình hộp: Nếu hình hộp ABCD.A'B'C'D' có ba cạnh xuất phát từ đỉnh A là AB, AD, AA' và có đường chéo AC' thì ta có quy tắc hình hộp là:

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$$

3. Phép nhân vectơ với một số

- Trong không gian, phép nhân vectơ với một số định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng và có các tính chất giống như các tính chất đã được xét trong mặt phẳng.

4. Ba vectơ đồng phẳng



* Định nghĩa: Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá trị của chúng song song với một mặt phẳng.

* Tính chất: Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

- Từ một điểm O bất kì vẽ $\vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}; \vec{OC} = \vec{c}$. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng.

- Nếu một trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là vectơ không thì ba vectơ đó đồng phẳng

- Nếu hai trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

* Định lý 1: Trong không gian, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Cặp số m, n là suy nhất.

* Định lí 2. Trong không gian, cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ bất kì ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p đó là duy nhất.

II. Bài tập căn bản

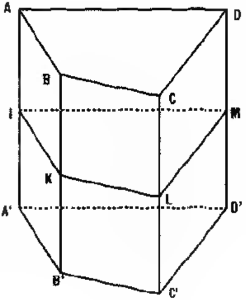
Bài 1. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tai I, K, L, M. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ.

a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$;

b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$;

c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

Giải



a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD'}$

b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}$, và $\overrightarrow{MD}$

c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC'}$ và $\overrightarrow{MD'}$.

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng.

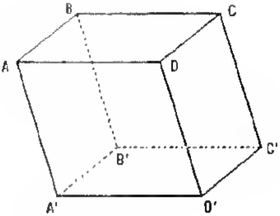
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$

Giải

a) Ta có:



$\vec{AB}+\vec{B'C'}+\vec{DD'}$

$=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA'}=\vec{AC'}$

(Quy tắc hình hộp)

b) $\vec{BD}-\vec{D'D}-\vec{B'D'}$

$=\vec{BD}+\vec{DD'}+\vec{D'B'}=\vec{BB'}$

c)

$\vec{AC}+\vec{BA'}+\vec{DB}+\vec{C'D}$

$=\left(\vec{AB}+\vec{AD}\right)+\left(\vec{BA}+\vec{BB'}\right)+$

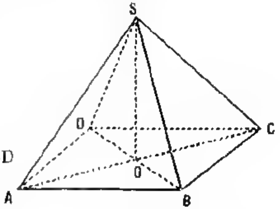
$\left(\vec{DA}+\vec{DC}\right)+\left(\vec{C'C}+\vec{C'D'}\right)$

$=\left(\vec{AB}+\vec{BA}\right)+\left(\vec{AD}+\vec{DA}\right)$

$+\left(\vec{BB'}+\vec{C'C}\right)+\left(\vec{DC}+\vec{C'D'}\right)=\vec{0}$

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng hình bình hành. Chứng minh rằng: $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}$

Giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC và của BD

Trong tam giác SAC, ta có O là trung điểm của AC

$\Rightarrow \vec{SA}+\vec{SC}=2\vec{SO}$

Trong tam giác SBD có O là trung điểm BD

$\Rightarrow \vec{SB}+\vec{SD}=2\vec{SO}$

Vậy $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}$ (đpcm)

Bài 4. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\vec{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{AD}+\vec{BC}\right)$; b) $\vec{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{AC}+\vec{BD}\right)$

Giải

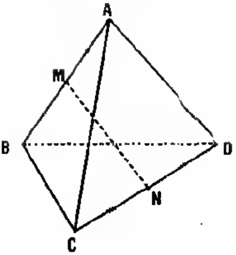
a) Ta có:

$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AD}+\vec{DN}$

$\vec{MN}=\vec{MB}+\vec{BC}+\vec{CN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right) \quad = \vec{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ (đpcm)



b) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}\right)$

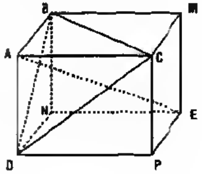
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$ (đpcm)

Bài 5. Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho:

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Giải



a)

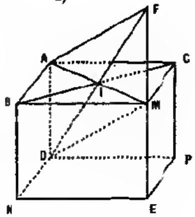
Ta dựng hình hộp dựa trên ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (đây là các vectơ không đồng phẳng). (hình a) Kí hiệu ABMC.DNEP

a) Khi đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$

với điểm E là đỉnh của hình hộp và AE là đường chéo của hình hộp đó.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DM} \Rightarrow$ AFMD là hình bình hành (hình b)



b)

Gọi I là trung điểm của AM, trong mặt phẳng (AMD) dựng DI cắt ME kéo dài F, đây chính là điểm cần xác định.

Bài 6. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$

Giải

Ta có: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$= \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}\right)$

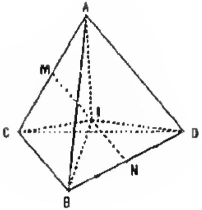
$3\vec{DG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 3\vec{DG} + \vec{0} = 3\vec{DG}$ (đpcm)

Bài 7. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

a) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$

b) $\vec{PI} = \frac{1}{4}\left(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}\right)$

Giải



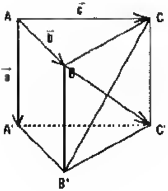
a) Ta có:

$$\vec{IA} + \vec{IC} = 2\vec{IM}$$
$$\vec{IB} + \vec{ID} = 2\vec{IN}$$
$$\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = 2\left(\vec{IM} + \vec{IN}\right) = \vec{0}$$

b) Ta có :

$$\vec{PI} = \vec{PA} + \vec{AI};\ \vec{PI} = \vec{PB} + \vec{BI}$$
$$\vec{PI} = \vec{PC} + \vec{CI};\ \vec{PI} = \vec{PD} + \vec{DI}$$
$$\Rightarrow 4\vec{PI} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} + \vec{AI} + \vec{BI} + \vec{CI} + \vec{DI}$$
$$= \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} + \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{PI} = \frac{1}{4}\left(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 8. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\vec{AA'} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (hay biểu thị) các vectơ $\vec{B'C}, \vec{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Giải

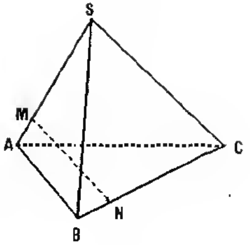
Ta có: $\vec{B'C} = \vec{B'B} + \vec{BC} = \vec{B'B} + \vec{AC} - \vec{AB}$

$$= -\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$
$$\vec{BC'} = \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{AC} - \vec{AB} + \vec{BB'}$$
$$= \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$$

Bài 9. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\vec{MS} = -2\vec{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\vec{NB} = -\frac{1}{2}\vec{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{AB}, \vec{MN}, \vec{SC}$ đồng phẳng

Giải

Ta có



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MS}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}\right) + \left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}\right)$$

$$= -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{BN}$$

$$= -\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}$$

$$= -\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$$

$\Rightarrow$ Các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng (đpcm)

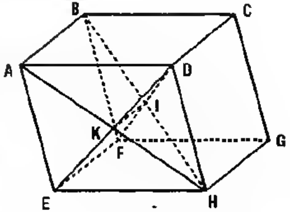
Bài 10. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

Giải

Nhận thấy K và I lần lượt là trung điểm của AH và BH

$\Rightarrow$ KI là đường trung bình của tam giác HAB

$\Rightarrow$ KI // AB $\Rightarrow$ giá của vectơ $\overrightarrow{KI}$ song song với mặt phẳng (ABCD)



Mặt khác $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ giá của vectơ $\overrightarrow{FG}$ cũng song song với mặt phẳng (ABCD). Còn vectơ $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trên mặt phẳng (ABCD).

Vậy các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng (đpcm)

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng;

(B) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng;

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$;

(D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{MN}$.

2. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' và M, N lần lượt là trung điểm của AC và B'C'. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng;

(B) Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng;

(C) Các vectơ $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng;

(D) Các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$;

(B) $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{CA'}$;

(C) $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

(D) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BD'}$.

4. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây.

(A) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$;

(B) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$;

(C) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$;

(D) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.

5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' (các mặt là cạnh hình chữ nhật) có các cạnh AB = a, AD = b, AA' = c. Khi đó AC' bằng:

(A) $a^2 + b^2 + c^2$; (B) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; (C) a.b.c; (D) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(B)	(D)	(A)	(B)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác vectơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ trong mặt phẳng (ABC) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian. Kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

* Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác vectơ không, tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$ được xác định bởi:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

- Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất tương tự tính chất vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.

Tính chất phân phối $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ vẫn đúng trong trường hợp các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

3. Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

* Định nghĩa: Vectơ $\vec{a}$ khác vectơ - không được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

* Nhận xét:

- Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

- Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.

- Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

4. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

* Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian, kí hiệu là $(\widehat{a, b})$ là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

* Nhận xét: Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng a và b thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$

5. Hai đường thẳng vuông góc

* Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Kí hiệu. $a \perp b$.

* Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

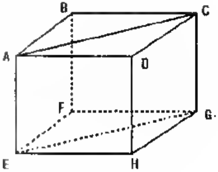
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\vec{AB}$ và $\vec{EG}$; b) $\vec{AF}$ và $\vec{EG}$; c) $\vec{AB}$ và $\vec{DH}$

Giải



a) Ta có $\vec{EG} = \vec{AC}$

$\Rightarrow \left(\vec{AB}, \vec{EG}\right) = \left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) = 45^0$

b) Ta có $\left(\vec{AF}, \vec{EG}\right) = \left(\vec{AF}, \vec{AC}\right) = \widehat{CAF}$

Vì AC, AF, FC là đường chéo của các hình vuông bằng nhau nên AC = AF = FC

$\Rightarrow \Delta AFC$ đều $\Rightarrow \widehat{CAF} = 60^0$

Vậy $\left(\vec{AF}, \vec{EG}\right) = 60^0$

c) Ta có: $\left(\vec{AB}, \vec{DH}\right) = \left(\vec{AB}, \vec{BF}\right) = 90^0$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh rằng: $\vec{AB}.\vec{CD} + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC} = 0$

b) Từ đẳng thức trên suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$

Giải

a) Ta có : $\vec{AB}.\vec{CD} + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC} = \vec{AB}\left(\vec{AD} - \vec{AC}\right) + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC}$

$= \vec{AB}.\vec{AD} - \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AC}.\vec{DB} + \vec{AD}.\vec{BC}$

$= \vec{AD}.\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) - \vec{AC}.\left(\vec{AB} - \vec{DB}\right) = \vec{AD}.\vec{AC} - \vec{AC}.\vec{AB} = \vec{0}$

b) Nếu $AB \perp CD$ và $AC \perp DB \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

Từ đẳng thức trên suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$

Bài 3. a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?

Giải

a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có thể song song với nhau, hoặc a và b cắt nhau hoặc a và b chéo nhau.

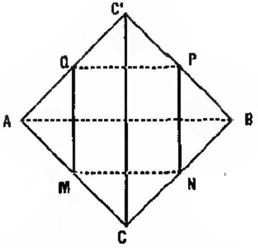
b) a có thể vuông góc với c; a có thể cắt c hoặc a có thể chéo c.

Bài 4. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$

B) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}\right)$

$- \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$= AB.AC'\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0$

Vì các tam giác ABC và ABC' là các tam giác đều nên $AB = AC = AC'$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = 0 \Rightarrow AB \perp CC'$

b) Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow$ MN // AB và $MN = \frac{1}{2}AB$

Tương tự PQ // AB và $PQ = \frac{1}{2}AB$

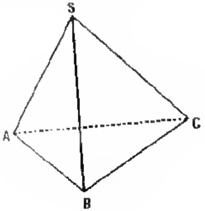
$\Rightarrow$ MN // PQ và MN = PQ $\Rightarrow$ tứ giác MNPQ là hình bình hành. Mặt khác PN cũng là đường trung bình của tam giác BCC' $\Rightarrow$ PN // CC'

Theo chứng minh câu a) $AB \perp CC' \Rightarrow MN \perp NP$

Vậy tứ giác MNPQ là hình chữ nhật (đpcm)

Bài 5. Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC, SB \perp AC, SC \perp AB$.

Giải



* Chứng minh $SA \perp BC$.

Xét tích vô hướng $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right)$

$\quad - \left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)$

$= SA^2.\cos\widehat{ASC} - SA^2.\cos\widehat{BSA} = 0$

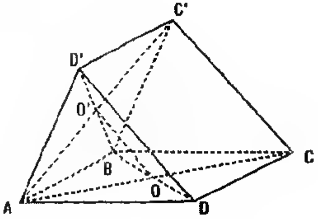
$\Rightarrow SA \perp BC$ (đpcm)

* Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$SB \perp AC$ và $SC \perp AB$

Bài 6. Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và ABC'D' có chung AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng: $AB \perp OO'$ và tứ giác CDD'C' là hình chữ nhật.

Giải



Ta thấy OO' là đường trung bình của tam giác BDD'

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$ (1)

Xét tích vô hướng

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

Vì ABCD và ABC'D' là các hình vuông

$\Rightarrow AB \perp AD$ và $AB \perp AD'$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD'} = 0$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = 0$ hay $AB \perp OO'$ (đpcm)

* Lại thấy: OO' cũng là đường trung bình của tam giác ACC'

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} \Rightarrow$ CDD'C là hình bình hành

Mặt khác do AB $\perp$ OO' $\Rightarrow$ AB $\perp$ DD' $\Rightarrow$ CD $\perp$ DD', $\Rightarrow$ CDD'C' là hình chữ nhật (đpcm).

Bài 7. Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

Giải

Vì S là diện tích của tam giác ABC $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}$ (1)

Ta có : $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2.\cos^2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$= AB^2.AC^2.\left(1-\cos^2\widehat{A}\right) = AB^2.AC^2.\sin^2\widehat{A} = \left(AB.AC.\sin\widehat{A}\right)^2$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(AB.AC.\sin A)^2} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$ (đpcm)

Bài 8. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$ Chứng minh rằng:

a) AB $\perp$ CD

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì MN $\perp$ AB và MN $\perp$ CD

Giải

a) Xét tích vô hướng:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$$

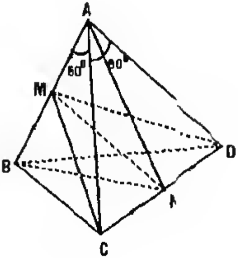
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos B\hat{A}D - \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos B\hat{A}C$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0$

$= 0$ (vì AB = AC = AD)

$\Rightarrow$ AB $\perp$ CD (đpcm)



b) Nhận thấy: tam giác ABC có AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$ $\Rightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ AB = BC = AC

Tương tự cũng có tam giác ABD đều (AB = AD = BD)

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow$ các trung tuyến BN và AN bằng nhau

$\Rightarrow \Delta NAB$ cân đỉnh N mà M là trung điểm của AB $\Rightarrow NM \perp AB$

Tương tự tam giác MCD là tam giác cân đỉnh M mà N là trung điểm CD

$\Rightarrow MN \perp CD$

Vậy $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$ (đpcm)

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD và AC. Cho $AB = 2a$, $CD = 2a\sqrt{2}$ và $MN = a\sqrt{5}$. Góc giữa AB và CD bằng bao nhiêu?

(A) 45^0; (B) 60^0; (C) 90^0; (D) 120^0.

2. Cho hình tứ diện ABCD cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right)$ bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

3. Cho hình chóp OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{1}{2}$; (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Góc giữa đường thẳng A'C' và đường thẳng B'C bằng bao nhiêu?

(A) 120^0; (B) 90^0; (C) 30^0; (D) 60^0.

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Khi đó $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{B'D'}$ bằng?

(A) 1; (B) -1; (C) $\sqrt{2}$; (D) $-\sqrt{2}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(A)

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Kí hiệu $d \perp (\alpha)$.

2. Định lý: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b của mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Hệ quả: Nếu một đường thẳng vuông góc với 2 cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3. Các tính chất

* Tính chất 1: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

* Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

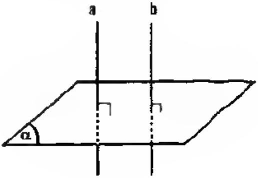
4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Xét các mặt phẳng (α), (β) và các đường thẳng a, b.

* Tính chất 1.

a)

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \perp b$$



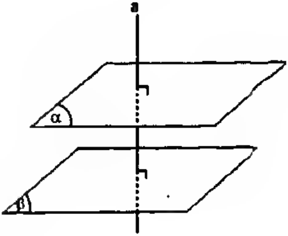
b)

$$\left.\begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

* Tính chất 2

a)

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



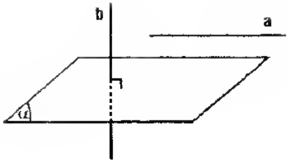
b)

$$\left.\begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ a \perp (\beta) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

* Tính chất 3

a)

$$\left.\begin{array}{l} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$$



b)

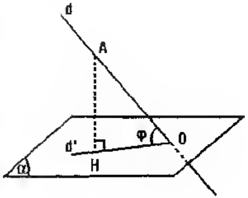
$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ b \perp (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow a // (\alpha)$$

5. Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α); b là đường thẳng không thuộc (α) và b không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó: $a \perp b \Rightarrow a \perp b'$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa: Cho đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm O và d không vuông góc với (α). Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) là góc tạo bởi đường thẳng d và hình chiếu vuông góc d' của d trên (α).



Nếu $d \perp (\alpha)$ thì góc giữa d và (α) bằng 90^0.

Chú ý: nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta có:

$$0^0 \leq \varphi \leq 90^0$$

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (α). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$

b) Nếu $a // (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$

c) Nếu $a // (\alpha)$ và $b // (\alpha)$ thì $b // a$

đ) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b // (\alpha)$

Giải

Mệnh đề a) và mệnh đề (đ) là các mệnh đề đúng.

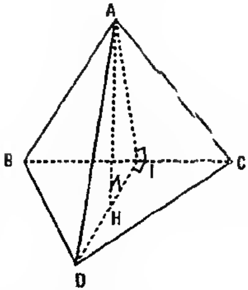
Mệnh đề b) và mệnh đề c) là các mệnh đề sai.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI)

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Giải



a) Vì I là trung điểm cạnh đáy BC của các tam giác cân ABC và DBC

$\Rightarrow AI \perp BC$ và $DI \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (ADI)$ (đpcm)

b) Theo chứng minh câu a) $BC \perp (ADI)$ và $AH \subset (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$

Thêm nữa $AH \perp DI$, mà DI và BC là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (BCD) $\Rightarrow AH \perp (BCD)$ (đpcm)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và có $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC)

Giải

a) Vì $SA = SC \Rightarrow$ tam giác SAC cân đỉnh S, mặt khác O là trung điểm của AC.

$\Rightarrow SO \perp AC$

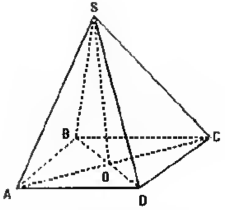
Tương tự $SO \perp BD$

Suy ra $SO \perp (ABCD)$ (đpcm)

b) Ta có $SO \perp AC$ và $BD \perp AC$ (hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow AC \perp (ABD)$

Tương tự $BD \perp (SAC)$ (đpcm)



Bài 4. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm của tam giác ABC;

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Giải

a) Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của AO trên mặt phẳng (ABC), vì

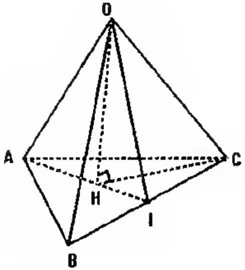
$$\left.\begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$$

$\Rightarrow OA \perp BC$

Theo định lý ba đường vuông góc suy ra $AH \perp BC$

Tương tự ta cũng có $CH \perp AB$

$\Rightarrow$ H là trực tâm của tam giác ABC (đpcm)



b) Gọi I là giao điểm của AH và BC

$\Rightarrow BC \perp AI$

Mặt khác $OA \perp BC$ suy ra $BC \perp (OAI) \Rightarrow BC \perp OI$

Trong tam giác vuông OAI có đường cao OH $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2}$.

Trong tam giác vuông OBC có đường cao OI $\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

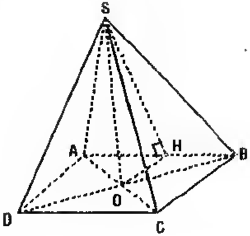
Vậy $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (đpcm)

Bài 5. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC; SB = SD. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (\alpha)$

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

Giải



a) Vì SA = SC $\Rightarrow$ tam giác SAC là tam giác cân đỉnh S; O là trung điểm AC

$\Rightarrow SO \perp AC$

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp AC \\ \text{Tương tự } SO \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

Tức là $SO \perp (\alpha)$ (đpcm)

b) Theo chứng minh câu a)

$SO \perp (\alpha) \Rightarrow SO \perp AB$

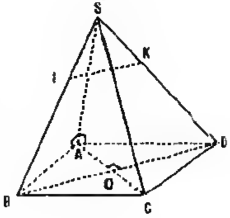
Lại có $SH \perp AB$, suy ra $AB \perp (SOH)$ (đpcm)

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh :

a) BD vuông góc với SC

b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC)

Giải



a) Ta thấy ABCD là hình thoi suy ra các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O hay $BD \perp AC$ (1).

Mặt khác theo giả thiết $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow BD \perp SA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (SAC)$ (3)

$\Rightarrow BD \perp SC$ (đpcm)

b) Từ giả thiết $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow IK \parallel BD$ (4)

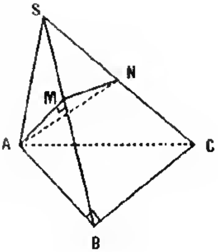
Từ (3) và (4) suy ra $IK \perp (SAC)$ (đpcm)

Bài 7. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc mặt đáy (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho: $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$

b) $SB \perp AN$.

Giải



a) Ta nhận thấy $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ (giả thiết) suy ra $BC \perp (SAB)$

Vì $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AM \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$

Lại có $AM \perp SB$. Suy ra $AM \perp (SBC)$;

b) Từ giả thiết $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} \Rightarrow MN \,//\, BC$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SBC) \Rightarrow SB \perp MN$

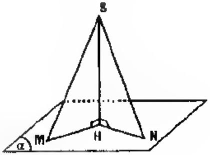
Vì $SB \perp AM$, suy ra $SB \perp (AMN) \Rightarrow SB \perp AN$ (đpcm)

Bài 8. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và M không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

Giải



Lấy điểm $N \neq M$ trên (α).

a) Giả sử: $HM = HN$

Ta thấy tam giác HSM và tam giác HSN có:

HS chung; $HM = HN$; $\widehat{SHM} = \widehat{SHN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta HSM = \Delta HSN$ (c.g.c) $\Rightarrow SM = SN$.

Ngược lại nếu $SM = SN$ thì hai tam giác vuông HSM và HSN cũng bằng nhau

$\Rightarrow HM = HN$

Vậy HM = HN $\Leftrightarrow$ SM = SN (đpcm)

b) Giả sử HM> HN $\Leftrightarrow \sqrt{SM^2 - SH^2} > \sqrt{SN^2 - SH^2}$

$\Leftrightarrow SM^2 > SN^2$

$\Leftrightarrow$ SM > SN (đpcm)

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng có nhiều hơn một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó.

(B) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có nhiều hơn một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng đó.

(C) Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c song song với nhau của mặt phẳng (α) thì a vuông góc với (α).

(D) Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) thì (P) // (Q) hoặc (P) $\equiv$ (Q).

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA = $a\sqrt{2}$ và SA $\perp$ (ABCD). Khi đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng?

(A) 45^0; (B) 60^0; (C) 120^0 ; (D) 135^0.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A và BC = a. S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho SA = SB = SC = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. O là trung điểm BC. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng?

(A) 60^0; (B) 45^0; (C) 90^0; (D) 30^0.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA $\perp$(ABCD). Khi đó hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAD) là?

(A) SD ; (B) SA ; (C) AD ; (D) AC.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác vuông tại A; gọi 0 là trung điểm BC; SO $\perp$(ABC). Khi đó mệnh đề nào sau đây là sai?

(A) SA $\perp$ BC ;

(B) Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) là OA;

(C) Hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAO) là SO;

(D) Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAO) là OB.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(A)	(B)	(A)	(C)

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^0.

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

- Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của $\mathscr{H}'$ được tính bởi công thức:

$$S' = S.\cos\varphi \text{ ; với } \varphi \text{ là góc giữa } (\alpha) \text{ và } (\beta)$$

3. Định nghĩa hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

4. Các Định lí

* *Định lí 1:* Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

* *Định lí 2:* Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

5. Các hình không gian đặc biệt: Hình lăng trụ đứng; hình hộp chữ nhật; hình lập phương; hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), những mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) /\!/ (\gamma)$ thì $(\beta) \perp (\gamma)$

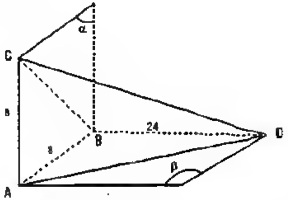
b) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \perp (\gamma)$ thì $(\beta) /\!/ (\gamma)$

Giải

a) Đúng ; b) Sai

Bài 2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó là hai điểm A và B sao cho AB = 8. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và AC = 6cm; BD = 24cm. Tính độ dài đoạn CD.

Giải



Vì AC $\perp$ AB $\Rightarrow$ trong tam giác vuông ABC có : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2$

Vì $BD \perp \Delta \Rightarrow BD \perp (\alpha), BC \subset (\alpha)$

$\Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow CD^2 = BC^2 + BD^2$

$\Rightarrow CD^2 = 10^2 + 24^2 = 26^2$

Vậy CD = 26 (cm)

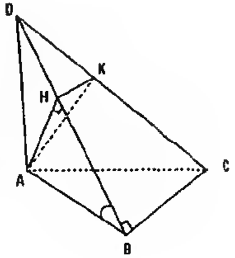
Bài 3. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông góc ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD)

c) HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

Giải



a) Để xác định góc giữa hai mặt phẳng ta xác định một mặt phẳng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng ban đầu. Góc giữa hai giao tuyến của mặt phẳng thứ ba với hai mặt phẳng ban đầu chính là góc cần xác định.

Ta thấy: BC là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (DBC)

Mặt khác: $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$

Vì do ΔABC vuông ở B $\Rightarrow AB \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (ABD)$

Giao tuyến của mặt phẳng (ABD) với mặt phẳng (ABC) và (DBC) lần lượt là AB và BD => góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là góc $\widehat{ABD}$ (đpcm)

b) Theo chứng minh trên $BC \perp (ABD)$ mà $BC \subset (BCD)$ => $(ABD) \perp (BCD)$

c) Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $AH \perp BD (H \in BD)$

Trong mặt phẳng (DBC) vẽ HK // BC ($K \in DC$)

Ta sẽ chứng minh mặt phẳng (AHK) là mặt phẳng (P) mà bài đã cho

Thật vậy: Theo chứng minh trên $BC \perp (ABD)$ và HK // BC (cách dựng) $\Rightarrow HK \perp (ABD) \Rightarrow HK \perp BD$

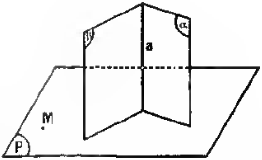
Mặt khác $AH \perp BD$ (cách dựng), từ đó suy ra $BD \perp (AHK) \Rightarrow$ mặt phẳng (AHK) chính là mặt phẳng (P) hay nói cách khác HK // BC với H, K là giao điểm của (P) với DB và DC.

Bài 4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) và (β) song song với nhau thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào?

Giải

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \\ a = (\alpha) \cap (\beta)\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (P)$$



Vì qua một điểm M cho trước có một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước nên qua M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với a.

Hay nói cách khác mặt phẳng (P) qua M vuông góc với (α) và (β) là duy nhất.

* Nếu (α) // (β) thì qua M có vô số mặt phẳng (P) vuông góc với cả (α) và (β).

Bài 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

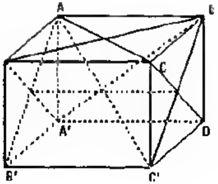
a) Mặt phẳng (A'B'C'D') vuông góc với mặt phẳng (BCD'A')

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD).

Giải

a) Vì ABB'A' là hình vuông $\Rightarrow AB' \perp BA'$ (1)

Mặt khác $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (ABB'A')$



$\Rightarrow AD \perp BA'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BA' \perp (AB'C'D)$

Mà $BA' \subset (BCD'A')$ suy ra

$(AB'C'D) \perp (BCD'A')$ (đpcm)

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow BD \perp AC'$ (1)

lại có $A'B \perp AB'$ và $B'C' \perp A'B \Rightarrow BA' \perp (AB'C'D) \Leftrightarrow BA' \perp AC'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$ (đpcm)

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD)

b) Tam giác SBD là tam giác vuông cân

Giải

a) Vì ABCD là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$ (1)

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow$ O là trung điểm của AC.

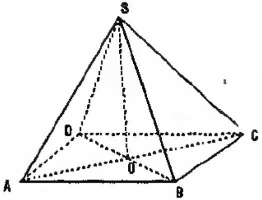
Vì SA = SC $\Rightarrow \Delta SAC$ cân đỉnh S

$\Rightarrow SO \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC \perp (SBD)$

Mà $AC \subset (ABCD)$

suy ra $(ABCD) \perp (SAC)$ (đpcm)



b) Ta có ΔBOC vuông tại O $\Rightarrow OB^2 + OC^2 = BC^2 = a^2$ (1)

ΔSOC vuông tại O $\Rightarrow OS^2 + OC^2 = SC^2 = a^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OB^2 = OS^2 \Rightarrow OS = OB = \frac{1}{2}BD$

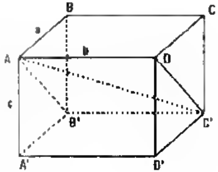
Mà O là trung điểm BD $\Rightarrow$ trong tam giác SBD có trung tuyến SO bằng nửa cạnh đáy BD $\Rightarrow$ tam giác SBD vuông ở S (đpcm).

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a; BC = b, CC' = c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt phẳng (ABB'A')

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.

Giải



a) Vì ABCD là hình chữ nhật nên $AD \perp AB$ (1)

vì ADD'A' là hình chữ nhật nên $AD \perp AA'$ (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow AD \perp (ABB'A')$

mà $AD \subset (ADC'B')$ nên $(ADC'B') \perp (ABB'A')$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

(vì $AB \perp AD$, $AB \perp AA'$, $AD \perp AA'$ nên các tích vô hướng

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = 0$ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'} = 0$)

Vậy $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

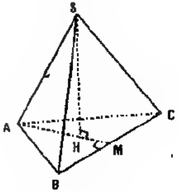
Bài 8. Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a

Giải

Áp dụng kết quả bài 7b với a = b = c ta được: độ dài đường chéo hình lập phương cạnh a bằng $a\sqrt{3}$.

Bài 9. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh rằng: $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$

Giải



Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow AM \perp BC$ (1)

Vì SH là đường cao của hình chóp nên $SH \perp (ABC)$

Và $H \in (ABC)$

Vì S.ABC là hình chóp đều

$\Rightarrow SA = SB = SC$

$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại

tiếp tam giác đều ABC

$\Rightarrow H \in AM$.

$\Rightarrow$ HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) (2)

Từ (1), (2) và theo định lý ba đường vuông góc suy ra $SA \perp BC$.

Tương tự ta chứng minh được $SB \perp AC$ (và $SC \perp AB$)

Bài 10. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a) Tính độ dài đoạn thẳng SO

b) Gọi M là trung điểm đoạn SC. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

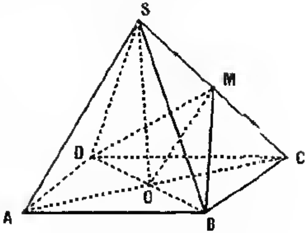
c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD)

Giải

a) Ta có $AC = BD = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) Vì các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a nên các tam giác SBC và SDC là các tam giác đều; M là trung điểm SC $\Rightarrow BM \perp SC$ và $DM \perp SC$



$\Rightarrow SC \perp (MBD)$; mà $SC \subset (SAC)$

$\Rightarrow (MBD) \perp (SAC)$ (đpcm)

c) Vì BM là đường cao của tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OMB ta có:

$$OM = \sqrt{MB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Lại thấy: $AC \perp BD$ và $SO \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC)$; mà BD là giao tuyến của mặt phẳng (MBD) và mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow$ góc $\widehat{MOC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Trong tam giác vuông OSC có: $OM = MS = MC = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \Delta MOC$ là tam giác vuông cân $\Rightarrow \widehat{MOC} = 45^0$.

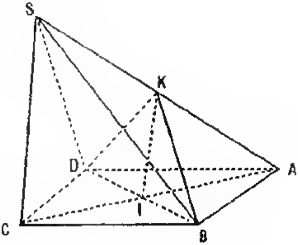
Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60^0, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

a) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

b) Trong tam giác SAC kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^0$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

Giải



a) Vì ABCD là hình thoi

$\Rightarrow AC \perp BD$ (1)

Theo giả thiết $SC \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SC \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD)$ suy ra $(SAC) \perp (SBD)$ (đpcm)

b) Vì ABCD là hình thoi cạnh a

và $\hat{A} = 60^0 = 60^0$

$\Rightarrow \hat{C} = 60^0;\ \hat{B} = \hat{D} = 120^0$

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC.BA.\cos 120^0$

$= 2a^2 + a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông CSA có:

$$SA^2 = SC^2 + CA^2 = \frac{6a^2}{4} + 3a^2 = \frac{18a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $\Delta AIK \sim \Delta ASC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{AS} = \frac{IK}{SC} \Rightarrow IK = \frac{AI.SC}{AS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2}.\ \text{Vậy } IK = \frac{a}{2}$$

c) Vì $\hat{A} = 60^0$ và $AB = AD = a \Rightarrow \Delta ABD$ đều $\Rightarrow BD = a$

Tam giác KBD có $KI = IB = ID = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại K hay $\widehat{BKD} = 60^0$.

Nhận xét $BD \perp (SAC)$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SA)$

Hơn nữa $IK \perp SA$ suy ra $SA \perp (KBD)$.

Mà SA là giao tuyến của (SAB) và (SAD) suy ra $\widehat{BKD}$ chính là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD). Vậy $(SAB) \perp (SAD)$ (đpcm)

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho tứ diện ABCD có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với đáy (BCD). Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $AB \perp (BCD)$; (B) $AC \perp (BCD)$;

(C) $AB \perp CD$; (D) $AB \perp BC$.

2. Cho tứ diện SABC có $\widehat{ABC} = 90^0, AB = 2a, BC = a\sqrt{3}$; $SA \perp (ABC)$; $SA = 2a$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng?

(A) 45^0 ; (B) 30^0; (C) 90^0; (D) 120^0.

3. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O; $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (BSA) và mặt phẳng (DSA) bằng?

(A) 45^0; (B) 60^0 ; (C) 30^0 ; (D) 90^0.

4. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a; AD = DC = a. Khi đó góc giữa mặt phẳng (ASB) và mặt phẳng (CSB) bằng?

(A) 30^0; (B) 45^0 ; (C) 60^0 ; (D) 90^0.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D có AB = 2a; AD = DC= a, $SA \perp (ABCD)$ và SA = a. Gọi (α) là mặt phẳng qua SD và vuông góc với (SAC). Diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD và (α) bằng?

(A) $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{a^2}{2}$; (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;(D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(D)	(C)	(A)

§5. KHOẢNG CÁCH

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Khoảng cách từ một điểm O đến đường thẳng a là độ dài đoạn thẳng OH với H là hình chiếu của O trên a. Kí hiệu d(O, a).

2. Khoảng cách từ một điểm O đến mặt phẳng (α) là độ dài đoạn thẳng OH với H là hình chiếu của O trên (α). Kí hiệu $d(O, \alpha)$.

3. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α) kí hiệu là: $d(a, \alpha)$

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Kí hiệu là $d((\alpha), (\beta))$.

5. Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng a, b chéo nhau và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt tại M và N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

II. Bài tập căn bản

Bài 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

a) Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b.

b) Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

c) Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b chéo nhau thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

d) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

e) Đường thẳng vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

Giải

a) sai ; b) đúng ; c) đúng ; d) sai ; e) sai.

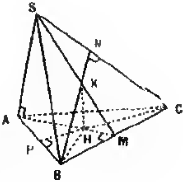
Bài 2. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA

Giải



a) Gọi M là chân đường cao hạ từ S xuống BC vì SA ⊥ (ABC) ⇒ AM là hình chiếu vuông góc của SM trên mặt phẳng (ABC).

Vì SM ⊥ BC ⇒ AM ⊥ BC (theo định lí ba đường vuông góc)

Vì H, K là trực tâm của Δ ABC và Δ SBC nên AH, SK và BC đồng quy tại M (đpcm).

b) Vì H là trực tâm của tam giác ABC ⇒ BH ⊥ AC (1)

vì SA ⊥ (ABC); BH ⊂ (ABC) ⇒ BH ⊥ SA (2)

Từ (1) và (2) suy ra BH ⊥ (SAC) ⇒ BH ⊥ SC (3)

Vì K là trực tâm của Δ SBC ⇒ BK ⊥ SC (4)

Từ (3) và (4) suy ra SC ⊥ (BHK) (đpcm)

- Theo chứng minh trên SC ⊥ (BHK) ⇒ HK ⊥ SC (5)

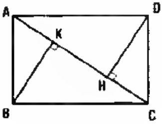
Mặt khác do AM ⊥ BC và SM ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (ASM) ⇒ BC ⊥ HK (6)

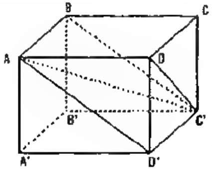
Từ (5) và (6) suy ra HK ⊥ (SBC) (đpcm)

c) Dễ thấy AM là đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D" cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Giải





Vì ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương ⇒ các tứ giác ABC'D', ACC'A', ADC'B' là các hình chữ nhật bằng nhau và có chung đường chéo AC'. Suy ra khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Ta chỉ tính một khoảng cách rồi suy ra kết quả còn lại.

Xét hình chữ nhật ABC'D' có các cạnh

$AD' = a\sqrt{2}; AB = a \Rightarrow AC' = a\sqrt{3}$.

Gọi K, H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và D' xuống AC'

$\Rightarrow$ BK = D'H là khoảng cách từ B và D' đến AC'.

Dễ thấy $\Delta ABK \sim \Delta AC'B$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC'} = \dfrac{BK}{C'B} \Rightarrow BK = \dfrac{AB.C'B}{AC'}$

$\Rightarrow BK = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

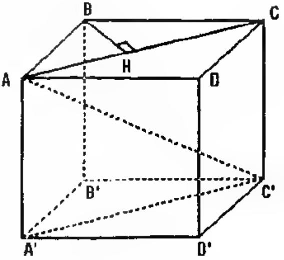
Vậy khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến AC' bằng nhau và bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a; BC = b, CC' = c

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'

Giải



a) Trong mặt phẳng (ACC'A') dựng $BH \perp AC$ (1)

($H \in AC$).

Ta thấy ABB'A' và ADD'A' là các hình chữ nhật

$\Rightarrow AA' \perp AD$ và $AA' \perp AB$

$\Rightarrow AA' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AA' \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow$ BH là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

Trong hình chữ nhật ABCD có AB = a, BC = b $\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nhận xét: $\Delta ABH \sim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BH}{CB} \Rightarrow BH = \dfrac{AB.BC}{AC}$

$\Rightarrow BH = \dfrac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Vì BB' // AA' $\Rightarrow$ BB' // (ACC'A') và AC' $\subset$ (ACC'A') $\Rightarrow$ khoảng cách giữa BB' và AC' bằng khoảng cách từ BB' đến mặt phẳng (ACC'A') và cũng bằng khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACC'A').

Theo câu a) khoảng cách này bằng $BH = \dfrac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

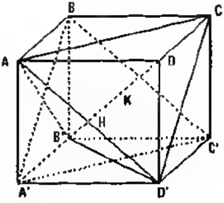
Bài 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C')

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD')

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Giải



a) Vì ABB'A' là hình vuông nên A'B $\perp$ AB'

lại thấy AD $\perp$ (ABB'A') $\Rightarrow$ AD $\perp$ A'B

suy ra A'B $\perp$ (ADB') $\Rightarrow$ A'B $\perp$ DB' (1)

Do A'B'C'D' là hình vuông

$\Rightarrow$ A'C' $\perp$ B'D', DD' $\perp$ (A'B'C'D') $\Rightarrow$ DD' $\perp$ A'C'

Suy ra A'C' $\perp$ (DB'D') $\Rightarrow$ A'C' $\perp$ B'D (2)

Từ (1) và (2) suy ra B'D $\perp$ (A'C'B)

b) Gọi H và K lần lượt là giao điểm của B'D với mặt phẳng (BA'C') và mặt phẳng (ACD').

Ta đã chứng minh được B'D $\perp$ (BA'C') và (BA'C') // (ACD') $\Rightarrow$ DK $\perp$ (ACD') và B'H $\perp$ (BA'C').

Dễ thấy AC = AD' = CD' = $a\sqrt{2}$ (giả sử cạnh của hình lập phương là a) và

DK $\perp$ (ACD') $\Rightarrow \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DA^2} + \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{DD'^2} \Rightarrow \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$

$\Rightarrow DK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Tương tự ta cũng có $B'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Mà $B'D = a\sqrt{3} \Rightarrow HK = B'D - B'H - DK = a\sqrt{3} - \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và (BA'C') bằng $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Vì $BC' \subset (BA'C')$ và $CD' \subset (ACD')$, bên cạnh đó $(ACD') \,//\, (BA'C')$ suy ra khoảng cách từ BC' đến CD' bằng khoảng cách giữa (ACD') và $(BA'C')$ và bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

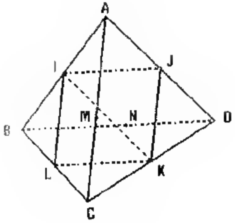
Bài 6. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD và AD = BC.

Giải

Gọi I, J, K, L, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD, CD, BC, AC, BD

Ta có: $\left.\begin{array}{l} IK \perp CD \\ JM \,//\, CD \end{array}\right\} \Rightarrow IK \perp JM$ (1)

Và $\left.\begin{array}{l} IK \perp AB \\ JN \,//\, AB \end{array}\right\} \Rightarrow IK \perp JN$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $IK \perp (JMLN)$

$\Rightarrow IK \perp JL$

Mặt khác IJKL là hình bình hành

$\Rightarrow$ IJKL là hình thoi $\Rightarrow$ IJ = JK

Mà BD = 2IJ; AC = 2JK $\Rightarrow$ BD = AC

Chứng minh tương tự ta cũng được: AD = BC

Vậy AD = BC và BD = AC (đpcm).

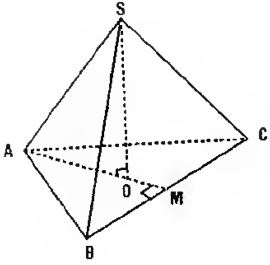
Bài 7. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

Giải

Gọi M là trung điểm BC và $AO = \frac{2}{3}AM$

$(O \in AM) \Rightarrow$ O là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow$ độ dài SO là khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)



Ta có: Trong tam giác vuông MAB có:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$$

$$= \sqrt{9a^2 - \frac{9a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông OAS ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy khoảng cách từ S đến mặt đáy (ABC) bằng a.

Bài 8. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Nhận thấy các tam giác đều BCD và ACD bằng nhau

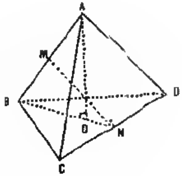
$\Rightarrow$ Các trung tuyến AN và BN bằng nhau.

$\Rightarrow \Delta$ NAB cân đỉnh N, M là trung điểm AB

$\Rightarrow NM \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta được $NM \perp CD$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD



Ta tính được $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác vuông MBN có:

$$MN = \sqrt{BN^2 - BM^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Đây cũng chính là khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện ABCD.

III. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; (D) $\dfrac{a}{3}$.

2. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và SA = a. Khoảng cách giữa SC và BD bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$; (D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

3. Cho hình lăng trụ ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AA' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi O và O' lần lượt là trung điểm AB và A'B'. Khoảng cách giữa AB và CB' bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$; (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$;(D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{10}$.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (C) $\frac{a\sqrt{3}}{1}$; (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

5. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B và AC = 2a, SA $\perp$ (ABC) và SA= a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?

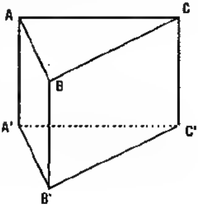
(A) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; (B) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; (C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; (D) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(B)

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Nhắc lại định nghĩa vectơ trong không gian. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Hãy kể tên những vectơ bằng $\overrightarrow{AA'}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình lăng trụ .



Trả lời

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình lăng trụ bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$ là các vectơ $\overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{CC'}$.

2. Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ không. Khi nào ba vectơ đó đồng phẳng.

Trả lời

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ hoặc khi hai trong số 3 vectơ đó cùng phương.

3. Trong không gian, hai đường thẳng không cắt nhau có thể vuông góc với nhau, có thể chéo nhau và cũng có thể song song với nhau?

Trả lời

- Trong không gian, hai đường thẳng không cắt nhau có thể vuông góc với nhau, có thể chéo nhau, và cũng có thể song song với nhau.

- Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

4. Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) có cần chứng minh a vuông góc với mọi đường thẳng của (α) hay không?

Trả lời

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) không cần chứng minh a vuông góc với mọi đường thẳng của (α) mà chỉ cần chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) là đủ.

5. Hãy nhắc lại nội dung định lí ba đường vuông góc.

Trả lời

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) và không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

6. Nhắc lại định nghĩa:

a) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng;

b) Góc giữa hai mặt phẳng.

Trả lời

a) Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của a trên (α). Nếu a // (α) hoặc a $\subset (\alpha)$ thì góc giữa a và (α) quy ước bằng 0^0.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với (α) và (β).

7. Muốn chứng minh mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) thì phải chứng minh như thế nào?

Trả lời

Muốn chứng minh mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) thì phải chứng minh (α) chứa một đường thẳng a sao cho a vuông góc với (β).

8. Hãy nêu cách tính khoảng cách:

a) Từ một điểm đến một đường thẳng;

b) Từ đường thẳng a đến mặt phẳng (α) song song với a;

c) Giữa hai mặt phẳng song song.

Trả lời

a) Để tính khoảng cách từ điểm A đến một đường thẳng Δ ta tìm hình chiếu vuông góc H của điểm A trên đường thẳng Δ sau đó tính độ dài đoạn thẳng AH, đó chính là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ.

b) Để tính khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (α) song song với a ta chọn một điểm nào đó của đường thẳng a rồi tìm hình chiếu của điểm đó trên mặt phẳng (α). Độ dài đoạn vuông góc đó chính là khoảng cách từ a đến (α).

c) Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song ta tìm một điểm M nào đó của một trong hai mặt phẳng rồi tìm hình chiếu của điểm M đó trên mặt phẳng còn lại. Độ dài đoạn vuông góc đó chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

9. Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Có thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau này bằng những cách nào?

Trả lời

Những cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b chéo nhau:

Cách 1. Tìm đường vuông góc chung Δ cắt a và b lần lượt tại M và N. Độ dài đoạn thẳng MN chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau đó.

Cách 2. Tìm mặt phẳng (α) chứa a và (α) // b. Tìm hình chiếu H của một điểm M bất kì nằm trên đường thẳng b lên mặt phẳng (α). Độ dài đoạn MH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 3. Tìm hai mặt phẳng song song lần lượt chứa a và b. Tìm hình chiếu H của một điểm M bất kì thuộc một trong hai mặt phẳng đến mặt phẳng còn lại. Độ dài đoạn MH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

10. Chứng minh rằng tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trả lời

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giả sử điểm M thỏa mãn MA = MB = MC. Khi đó ta thấy các tam giác MOA, MOB, MOC bằng nhau theo trường hợp c.c.c.

Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow \Delta IMA = \Delta IMB$(c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MIA} = \widehat{MIB} = 90^0$

$\Rightarrow IM \perp AB$

Mặt khác $OI \perp AB$ suy ra $AB \perp (MOI) \Rightarrow OM \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta cũng được $AC \perp OM$ Suy ra $OM \perp (ABC$ Vậy M chạy trên đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC) (đpcm).

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song .

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b mà b vuông góc đường thẳng a thì a // (α).

d) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

Giải

a) Đúng; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai ; e) Sai.

Bài 2. Các điều khẳng định sau đây, điều nào là đúng?

a) Khoảng cách của 2 đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Giải

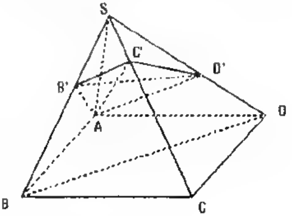
a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai.

Bài 3. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA= a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh B'D' song song với BD và AB' vuông góc với SB

Giải



a) Ta thấy các tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

- Vì AD // BC mà AD $\perp$ (SAB).

$\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAB) $\Rightarrow$ BC $\perp$ SB

$\Rightarrow$ ΔSBC vuông tại B.

Tương tự: AB $\perp$ (SAD) và CD // AB

$\Rightarrow$ CD $\perp$ (SAD) $\Rightarrow$ CD $\perp$ SD

$\Rightarrow$ Δ SCD vuông tại D.

Vậy các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b) Vì BD $\perp$ AC và BD $\perp$ SA nên BD $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ BD $\perp$ SC

Mà (α) $\perp$ SC $\Rightarrow$ BD // (α)   (1)

Theo giả thiết B'D' $\subset$ (α) $\Rightarrow$ B'D' $\perp$ SC   (2)

Từ (1), (2) và BD $\perp$ SC $\Rightarrow$ BD // B'D'

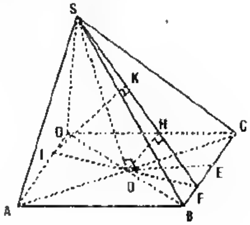
* Vì A'B' $\perp$ SC (do SC $\perp$ (α)) và AB' $\perp$ BC (do BC $\perp$ (SAC)) $\Rightarrow$ AB' $\perp$ SB.

Bài 4. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SO = $\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC)

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Giải



a) Vì E là trung điểm BC và O là trung điểm AC.

$\Rightarrow OE = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

Theo giả thiết hình thoi ABCD có góc

$\widehat{BAD} = 60^0$

$\Rightarrow$ Δ BAD đều $\Rightarrow$ BD = a $\Rightarrow$ OB = $\frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ Δ OBE là tam giác đều.

F là trung điểm BE $\Rightarrow$ OF $\perp$ BE $\Rightarrow$ OF $\perp$ BC (1)

Lại có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SOF)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SOF) \perp (SBC)$ (đpcm).

b) Trong mặt phẳng (SOF) vẽ $OH \perp SF$ ($H \in SF$)

vì $BC \perp (SOF) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (SBC)$

$\Rightarrow$ độ dài đoạn thẳng OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Trong tam giác vuông OSF có đường cao OH $\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OF^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{9a^2}{16}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{16}} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$$

Gọi I là giao điểm của OF và AD. Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK \perp SF$. Vì $OH \perp SF$, $IK \perp SF \Rightarrow OH // IK \Rightarrow IK \perp (SBC)$

$\Rightarrow$ độ dài đoạn thẳng IK là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC).

Lại thấy $I \in AD$ mà $AD // (SBC) \Rightarrow$ IK là khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SDC) hay IK là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Dễ thấy OH là đường trung bình của Δ FIK

$$\Rightarrow IK = 3.OH = \frac{3a}{4}$$

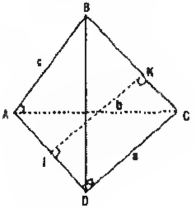
Vậy $d(O, (SDC)) = \dfrac{3a}{8}$ và $d(A, (SBC)) = \dfrac{3a}{4}$.

Bài 5. Tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Tam giác ADC vuông tại D có CD = a.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.

b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Giải



a) Vì $(ABC) \perp (ADC)$ và $AB \perp AC$ nên $AB \perp (ADC)$

$\Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A.

Vì $AB \perp (ADC) \Rightarrow AB \perp CD$;

Theo giả thiết $AD \perp DC$;

Suy ra $CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp BD$

$\Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại D

b) Xét Δ ADC và Δ ADB có

AB = DC' = a; AD chung ; BAD = CDA = 90^0

$\Rightarrow$ Δ DAC = Δ ADB (c.g.c) $\Rightarrow$ các trung tuyến BI và CI bằng nhau

$\Rightarrow$ Δ IBC cân đỉnh I, mà K là trung điểm BC

$\Rightarrow$ IK $\perp$ BC (1)

Từ Δ DAC = Δ ADB $\Rightarrow$ AC = BD $\Rightarrow$ DB = b

Xét Δ ABC và Δ DCB có : AB = DC = a; AC = DB = b; BAC = BDC = 90^0

$\Rightarrow$ Δ ABC = Δ DCB (c.g.c) $\Rightarrow$ các trung tuyến AK và DK bằng nhau

$\Rightarrow$ Δ KAD cân đỉnh K mà I là trung tuyến AD $\Rightarrow$ KI $\perp$ AD (2)

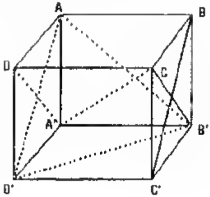
Từ (1) và (2) suy ra IK là đường vuông góc chung của AD và BC (đpcm)

Bài 6 Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD)

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Giải



a) Vì BCC'B' là hình vuông nên BC' $\perp$ CB' (1)

vì DC $\perp$ (BCC'B') $\Rightarrow$ DC $\perp$ BC' (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC' $\perp$ (A'B'CD) (đpcm)

b) Vì AB' $\subset$ (AB'D') và BC' // (AB'D') nên khoảng cách giữa AB' và BC' bằng khoảng cách từ BC' đến mặt phẳng (AB'D') cũng chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (BDC').

Ta đã tính được khoảng cách này bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^0$ và SA = SB = SD = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC.

b) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

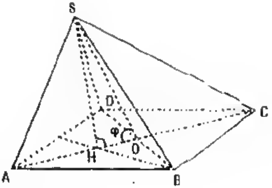
c) Chứng minh SB vuông góc với BC.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Tính $\tan\varphi$.

Giải

a) Vì hình thoi ABCD có góc BAD = 60^0

$\Rightarrow$ Δ ABD là tam giác đều.



Gọi H là tâm của Δ ABD

Theo giả thiết SA = SB = SD

$\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABD)

$\Rightarrow$ SH = d(S, (ABCD))

Trong tam giác đều ABD cạnh a

có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông SHA có: $SH^2 = SA^2 - AH^2$

$\Rightarrow SH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{9} = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow OC = OA = \frac{3}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Và $OH = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow HC = HO + OC = \frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông HSC có :

$$SC^2 = SH^2 + HC^2$$
$$= \frac{15a^2}{36} + \frac{12a^2}{9} = \frac{7a^2}{4}$$

Vậy $SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

b) Theo chứng minh ở câu a) SH $\perp$ (ABCD) mà SH $\subset$ (SAC)

Vậy (SAC) $\perp$ (ABCD) (đpcm)

c) Trong tam giác SBC có: $SB^2 = \frac{3a^2}{4}; BC^2 = a^2; SC^2 = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow SC^2 = SB^2 + BC^2$ $\Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại B hay SB $\perp$ BC (đpcm)

d) Vì ABCD là hình thoi $\Rightarrow$ AC $\perp$ BD (1).

Mặt khác Δ SBD cân đỉnh S có O là trung điểm BD $\Rightarrow$ SO $\perp$ BD (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BD $\perp$ (SAO)

BD là giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABCD)

Suy ra $\varphi = \widehat{SOA} = \widehat{SOH}$.

Trong tam giác vuông SOH ta có: $\tan\varphi = \frac{SH}{OH} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{5}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

(A) Từ $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{BA} = -3\vec{CA}$

(B) Từ $\vec{AB} = -3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{CB} = 2\vec{AC}$

(C) Vì $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng

(D) Nếu $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

2. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây?

(A) Vì $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP;

(B) Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có:

$$\vec{OI} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$$

(C) Từ hệ thức $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng

(D) Vì $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng .

3. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng?

Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh a và O là trung điểm của AG. Ta có: $\vec{AB}.\vec{EG}$ bằng?

(A) a^2 ; (B) $a^2\sqrt{2}$; (C) $a^2\sqrt{3}$; (D) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

4. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

(A) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c;

(B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c;

(C) Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c;

(D) Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b)

5. Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng.

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau;

(B) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia;

(C) Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d;

(D) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

6. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Hai đường thẳng a và b trong không gian có các vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.

(B) Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

(C) Không thể có một hình chóp tứ giác S.ABCD nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

(D) Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) và $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Điều kiện cần và đủ để $\Delta \perp (\alpha)$ là $\vec{n}.\vec{u} = 0$ và $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

7. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

(A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

(D) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song;

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song;

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song;

(D) Hai đường thẳng không cắt và không song song thì chéo nhau.

9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

(D) Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại;

(B) Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước;

(C) Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước;

(D) Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.

11. Khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a bằng kết quả nào trong các kết quả sau đây:

(A) $\dfrac{3a}{2}$; (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; (D) $a\sqrt{2}$.

Đáp án

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Đáp án	(C)	(D)	(A)	(B)	(D)	(C)	(D)	(A)	(A)	(A)	(B)

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm A(1; 1), B(0; 3), C(2; 4). Dựng ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau:

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;1)$

b) Phép đối xứng qua trục Ox.

c) Phép đối xứng qua tâm I(2; 1)

d) Phép quay tâm O góc 90^0.

e) Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép vị tự tâm O tỉ số k = -2.

Giải

Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình trên. Khi đó

a) A' (3; 2), B'(2; 4); C'(4; 5).

b) A' (1;-1), B'(0; -3); C'(2; -4).

c) A' (3;1), B'(4; -1); C'(2; -2).

d) A' (-1;1), B'(-3; 0); C'(-4; 2).

e) A' (2;-2), B'(0; -6); C'(4; -8).

Bài 2 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác, các điểm A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Tìm phép vị tự f biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

b) Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng

c) Tìm ảnh của O qua phép vị tự f.

d) Gọi A", B", C" lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH, A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O); A_1', B_1', C_1' tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C. Tìm ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$.

e) Chứng minh chín điểm , A', B', C', A", B", C", A_1', B_1', C_1' cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC).

Giải

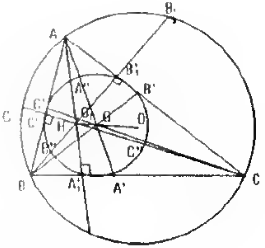
a) Dễ thấy $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Suy ra: f là phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

b) Nhận thấy OA' $\perp$ BC, B'C' // BC $\Rightarrow$ A'O $\perp$ B'C'.

Tương tự B'O ⊥ A'C' (...) A'B'

⇒ O là trực tâm của tam giác A'B'C' mà H là trực tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \Rightarrow$ G, O, H thẳng hàng



c) Ta có: $f(O) = O_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{GO_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$

⇒ O_1 nằm trên OH và O_1 là trung điểm của OH

d) Nhận thấy: ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ lần lượt là: A'',B'', C'', A_1', B_1', C_1'

e) Chứng minh A'', B'', C'', A_1', B_1', C_1' cùng thuộc đường tròn (O_1). Sau đó chứng minh A', B', C' cùng thuộc đường tròn tâm (O_1). Chẳng hạn: chứng minh $O_1A_1' = O_1A'$.

Lưu ý: đường tròn (O_1) là đường tròn tâm $O_1 = f(O)$ có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ bán kính đường tròn (O).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang ABCD và G là trọng tâm của tam giác ECD

a) Chứng minh rằng bốn điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng (α) và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một giao tuyến d.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

c) Lấy một điểm K trên đoạn SE và gọi C' = SC ∩ KB; D' = SD ∩ KA. Chứng minh rằng giao điểm của AC' và BD' thuộc đường thẳng d nói trên.

Giải

a) Vì E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang, M là trung điểm AB nên EM cắt CD tại trung điểm N của CD ⇒ M, G, E thẳng hàng.

⇒ S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng. Gọi đó là mặt phẳng (α).

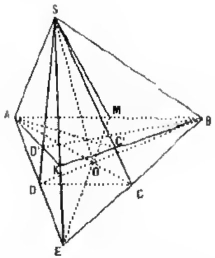
Gọi O là giao điểm của AC và BD ⇒ O, M, G, E thẳng hàng.

⇒ SO là giao tuyến của (α) và các mặt phẳng (SAC) và (SBD) hay d = SO.

b) Dễ thấy SE chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Nhận thấy: d là giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD); AC' là giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (ABK); BD' là giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABK).

Tức là ba mặt phẳng phân biệt (SAC), (SBD) và (ABK) cắt nhau theo giao tuyến phân biệt, trong đó có hai giao tuyến AC' và BD' cắt nhau. Suy ra ba giao tuyến d, AC',BD' đồng quy hay AC' và BD' cắt nhau tại giao điểm thuộc đường thẳng d (đpcm)



Bài 4. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D' có E, F, M và N lần lượt là trung điểm của AC, BD, AC' và BD'. Chứng minh rằng MN = EF.

Giải

Nhận thấy: E, M lần lượt là trung điểm của AC và AC' $\Rightarrow$ EM là đường trung bình của tam giác ACC' $\Rightarrow$ EM = $\frac{1}{2}$CC' và EM // CC' (1).

Tương tự: FN cũng là đường trung bình của tam giác BDD'

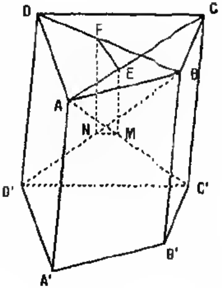
$\Rightarrow$ FN = $\frac{1}{2}$ DD' và FN // DD' (2)

Từ (1), (2) và DD' // CC', DD'= CC'

Suy ra EM = FN và EM // FN

$\Rightarrow$ EFNM là hình bình hành

$\Rightarrow$ EF = MN (đpcm).



Bài 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'.

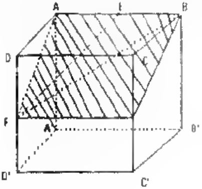
Giải

* Thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFB) là hình bình hành ABLF với L thỏa mãn: FL // CD và L $\in$ CC' (hình a)

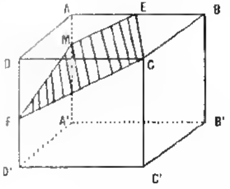
* Thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFC) là hình thang EMFC với M thỏa mãn: MF // FC và M $\in$ AA' (hình b)

* Thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFC') là ngũ giác ENC'FP với N và P là các điểm thỏa mãn EN // FC' và N ∈ BB'; FP // C'N và P ∈ AA' (hình c)

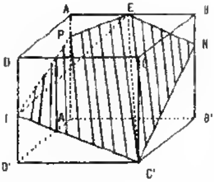
* Thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (EFK) là lục giác đều $EB_1KC_1FD_1$ với B_1, C_1, D_1 là các điểm thỏa mãn: B_1 là trung điểm BB'; C_1 là trung điểm C'D'; D_1 là trung điểm DA (hình d).



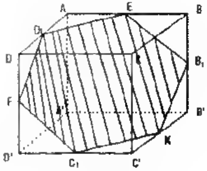
Hình a



Hình b



Hình c



Hình d

Bài . Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và B'C.

b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C'.

Giải

a) Gọi I là tâm của hình vuông BCC'B'.

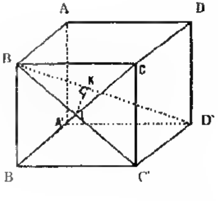
Trong mặt phẳng (BC'D') dựng IK ⊥ BD' với K ∈ BD'

Dễ thấy AB ⊥ (BCC'B')

⇒ AB ⊥ B'C (1)

và do BCC'B' là hình vuông ⇒ BC' ⊥ B'C (2)

Từ (1) và (2) ⇒ B'C ⊥ (ABC'D')



Mà IK $\subset$ (ABC'D') $\Rightarrow$ B'C $\perp$ IK

Vậy IK là đường vuông góc chung của B'C và BD'

b) Trong tam giác vuông BC'D' có BC' = $a\sqrt{2}$; BD' = $a\sqrt{3}$; C'D' = a ; BI = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Dễ thấy Δ BIK ~ Δ BD'C' (g.g) $\Rightarrow$ $\frac{BI}{BD'} = \frac{IK}{D'C'} \Rightarrow IK = \frac{BI.D'C'}{BD'}$

$$\Rightarrow IK = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Bài 7. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có AD = 2a, AB = BC = a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy một điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^0$

b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng C'D' luôn luôn đi qua một điểm cố định khi $\Rightarrow$ di động trên tia Ax.

Giải

a) Dễ thấy AD $\perp$ (SAB) và do BC // AD

$\Rightarrow$ BC $\perp$(SAD) $\Rightarrow$ BC $\perp$ SB $\Rightarrow$ $S\hat{B}C = 90^0$.

* Ta tính được CD = CA = $a\sqrt{2}$

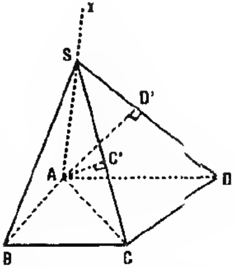
mà AD = 2a $\Rightarrow$ Δ ACD vuông tại C

$\Rightarrow$ CD $\perp$ AC

Mặt khác SA $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ CD $\perp$ SA

$\Rightarrow$ CD $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ CD $\perp$ SC

$\Rightarrow$ $\widehat{SCD} = 90^0$



b) Theo chứng minh câu a) CD $\perp$ (SAC), AC' $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ CD $\perp$ AC'

Hơn nữa AC' $\perp$ SC suy ra:

AC' $\perp$ (SCD) $\Rightarrow$ AC' $\perp$ SD

Dễ thấy AB $\perp$ (SCD) $\Rightarrow$ AB $\perp$ SC

Suy ra AC', AD', AB cùng vuông góc với SC $\Rightarrow$ AC', AD', AB cùng nằm trên mặt phẳng vuông góc với SC hay AC', AD', AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

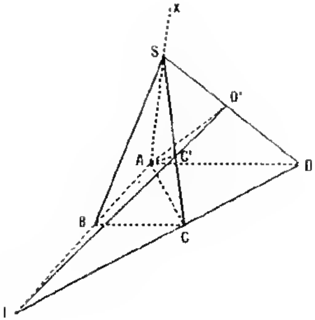
c) Theo chứng minh câu b) AC', AD', AB cùng nằm trên một mặt phẳng, gọi đó là mặt phẳng (α).

Gọi I là giao điểm của AB và CD

=> ID' là giao tuyến của mặt phẳng (SCD) và (α);

Dễ thấy C' $\in$ SC; C' $\in$ AC'

=> C' nằm trên giao tuyến của (α) và (SCD) $\Rightarrow$ C', D', I thẳng hàng hay C'D' luôn đi qua I khi S thay đổi trên Ax. (đpcm).



MỤC LỤC

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

CHƯƠNG III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN